Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Dottorato di ricerca
in Filosofia e Scienze della Formazione
ciclo XXXIII

Tesi di Ricerca

Didattica della matematica alla scuola primaria

Il possibile contributo della scienza Mente, cervello e didattica
SSD: M-PED/04

Coordinatore del Dottorato
Luigi Perissinotto PhD

Supervisori
Monica Banzato PhD & Demis Basso PhD

Dottorando
Alice Tovazzi
Matricola 956382

Grazie a quanti hanno condiviso con me questo viaggio.

“Permettetemi di lasciarvi [...] il solo consiglio pratico che ho da offrirvi: giocate! Non avete bisogno di un diploma per fare matematica. Non avete bisogno di seguire lezioni o di leggere un libro. La realtà matematica è vostra e potete godervela per il resto della vita. Esiste nella vostra immaginazione e potete farci tutto quello che volete. Anche niente, ovviamente.”
Lockhart, 2009, p. 115

Indice

1 | Introduzione:

Gran parte di questa tesi è stata scritta durante i mesi di lock-down, confinamento causato della pandemia di Covid-19. In quel periodo, ognuno in Italia si è imbattuto con inusuale frequenza con indici di trasmissione, proiezioni dell'andamento del contagio, curve epidemiche, si è insomma trovato a dover decifrare il suo presente attraverso rappresentazioni matematiche della realtà che stava vivendo.

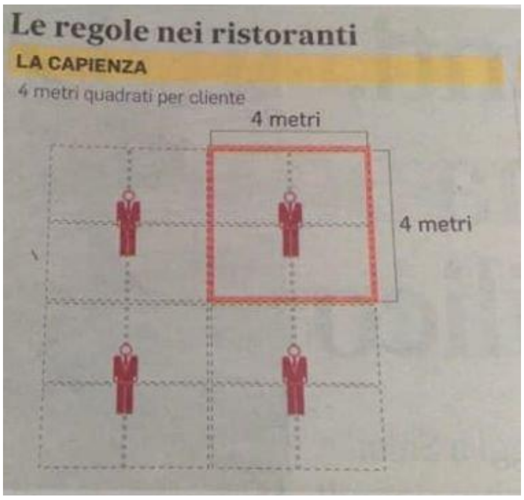


Figura 1.1: In data 12 maggio 2020, il quotidiano il Messaggero riportava questa rappresentazione della disposizione dei tavoli all'interno dei ristoranti prevista per la Fase 2 del contenimento.

Questo triste avvenimento ha portato alla luce quello che la Didattica della Matematica ha definito come capisaldi già da decenni: in primo luogo la matematica non è più un vezzo, un lusso destinato e utile a pochi, come forse si poteva pensare fino a decenni fa, ma è invece imprescindibile per la cittadinanza e la sopravvivenza stessa del genere umano (Holenstein, Bruckmaier & Grob, 2020).In secondo luogo il livello minimo di competenza matematica necessario non ad essere cittadini attivi, ma appunto anche solo a comprendere quanto si sta vivendo, va ben oltre le conoscenze acquisite alla scuola primaria (Barelli, Branchetti, Tasquier, Albertazzi & Levrini, 2018). Ciononostante, come sarà illustrato nel presente lavoro, sono proprio i primi anni di scolarizzazione, quelli cioè in cui ogni bambino entra in contatto per la prima volta con una matematica formale, ad essere cruciali per gli apprendimenti successivi (Claessens & Engel, 2013). In terzo luogo, i livelli di competenza matematica ottenuti dai cittadini italiani, a tutte le età, risultano ancora insufficienti (OECD, 2019; Timms, 2015).

Tale esempio di incompetenza matematica porta a riflettere su come sia possibile che un errore grossolano su una nozione geometrica elementare, quale l'area di un quadrato, passa ogni filtro di un quotidiano a tiratura nazionale senza che nessuno in redazione se ne accorga. Non si tratta quindi solo di uno scarso livello di competenza, ma di un'abitudine all'ignoranza. Di qui la necessità, all'origine del presente lavoro di tesi, di impedire alla scuola di venire infettata da questo pericoloso germe. Prima di qualsiasi riflessione teorica, la dottoranda ha infatti avvertito questa necessità e da lì lo studio ha preso i primi passi.

Con uno sguardo pedagogico, e non matematico, è stato dunque osservato il processo di insegnamento-apprendimento all'interno di sei diverse classi di due scuole primarie, allo scopo di verificare come differenti tecniche didattiche potessero o meno coniugarsi con l'orientamento pedagogico e didattico dei docenti. L'assunto che sottende la ricerca è infatti l'evidenza per cui la Didattica della Matematica e la prassi didattica abbiano subito uno scollamento, per cui se la ricerca sta ottenendo enormi risultati, non altrettanto si può dire della scuola (con evidenti ripercussioni sulla società tutta). Questa tesi è quindi un tentativo nella direzione di fare luce su una delle possibili spiegazioni di questa frattura.

Nel primo capitolo sarà ripercorsa la storia dell'insegnamento matematico e della sua didattica, facendo riferimento sia alle disposizioni legislative che ne hanno modificato l'assetto, sia alle teorie che sottendono le grandi rivoluzioni del pensiero avvenute nell'ultimo secolo. Successivamente, nel secondo capitolo, sarà delineato un quadro teorico dei processi di insegnamento-apprendimento, focalizzando i fattori salienti di influenza della relazione educativa e della costruzione della conoscenza. Il terzo capitolo sarà invece dedicato alla definizione della scienza Mente, cervello e didattica (meglio nota con l'inglese Mind, brain, and education) e al possibile contributo che essa può apportare alla Didattica della Matematica, coinvolgendo anche i possibili risvolti nella pratica d'aula. Sarà quindi delineato lo studio oggetto del presente lavoro di tesi e saranno discussi i risultati ottenuti.

2 | Storia e teorie dell'insegnamento matematico

Nel presente capitolo sarà delineato il quadro teorico attuale della didattica della matematica. Dopo un excursus storico che illustra i momenti di maggiore rottura, teorica e istituzionale, dell'insegnamento della matematica alla scuola primaria nella penisola, sarà illustrata la nascita e la definizione della Didattica della Matematica, che ha ottenuto uno status di disciplina scientifica indipendente solo nel corso dell'ultima parte del secolo scorso. L'utilizzo delle iniziali maiuscole permette di distinguere la disciplina scientifica dalla pratica d'aula. Sarà infine dato spazio a una sistematizzazione delle teorie dell'apprendimento e dei modelli didattici fondanti tanto la didattica generale quanto quella disciplinare.

2.1 Breve excursus storico dell'insegnamento della matematica

Se chiedessimo a un passante di dare una definizione del termine *matematica*, potremmo prevedere con un buon margine di certezza che si riferirebbe a una scienza, al limite a una disciplina, e che molto probabilmente utilizzerebbe aggettivi afferenti al campo semantico della difficoltà. Potrebbe sorprendere sapere che nella storia della matematica non è sempre stato così. È quindi innanzitutto necessario definire cosa si intenda con *matematica* e, inevitabilmente, ci troveremo già proiettati nella storia della sua didattica.

Il termine *matematica* giunge alla lingua italiana dopo aver visto la luce in quella greca. Non si tratta di una mera questione etimologica: nell'età classica con $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) si indicava l'apprendimento, il sapere, la conoscenza, ma anche il desiderio e la facoltà di imparare, le stesse istruzione ed educazione e, solo in ultima istanza, una disciplina o materia di studio, anche se intesa in senso lato (Montanari, 2004). Quest'ultimo significato prevarrà in latino (mathematica come disciplina matematica) e si manterrà in italiano (Castiglioni & Mariotti, 1996; Zingarelli, 2000). La questione etimologica è essenzialmente rilevante per due questioni: se il termine matematica indicava l'apprendimento, ci rendiamo conto di come la scienza e la sua didattica abbiano avuto origine e inizialmente convissuto in maniera simbiotica. Allo stesso tempo il mathematicos non era più qualcuno designato allo studio della matematica, ma chi era propenso ad apprendere e dedito allo studio, contrariamente a quanto avveniva fin dal IV millennio a.C., periodo in cui la matematica era stata considerata come una tecnica da impartire a futuri scribi (Montanari, 2004; Millán Gasca, 2016). Fu infatti con la scuola ateniese che la matematica assunse un valore differente rispetto al passato: se per Egizi, Sumeri e Babilonesi le conoscenze matematiche erano riservate a specifici allievi, destinati a professioni legate alla matematica (come aspiranti geometri che ridefinivano i confini dei campi dopo le piene del Nilo o astronomi capaci di determinare e scandire il tempo e le stagioni), ad Atene lo studio era accessibile a chiunque fosse interessato e avesse denaro a sufficienza per sostenere gli insegnanti. In ogni caso, aritmetica e geometria erano parte costituente del curriculum destinato alla classe dirigente, allora identificata con i guerrieri: queste discipline non erano state scelte per le loro caratteristiche utilitaristiche, ma piuttosto in quanto capaci di agire sull'ingegno (Pepe, 2016). In latino, e successivamente in italiano e nelle altre lingue europee, così come nelle rispettive culture educative, prevalse tuttavia l'idea di matematica come di una disciplina da apprendere per poter svolgere una specifica professione (Millán Gasca, 2016).

Ripercorrere, seppur brevemente, la storia dell'insegnamento primario della matematica in Italia, assume qui significato e motivazione. Infatti, nonostante la Didattica della Matematica in quanto scienza indipendente ed autonoma abbia visto la luce solo nel secolo scorso, l'insegnamento matematico attuale attinge a piene mani a tempi ben più remoti. Per comprendere i motivi che soggiacciono alle scelte formative attuali, occorre saper riconoscere le tracce che secoli di storia pedagogica, ma anche politica, hanno impresso all'insegnamento matematico. Durante l'Impero Romano, i magister ludi proponevano ai bambini esercizi con simboli numerici e parole, alla stregua di quanto avviene oggi nelle prime classi della scuola primaria, mentre nel Medioevo gli alunni apprendevano la notazione posizionale e le procedure di calcolo con i numeri arabi nelle scuole d'abaco. Pratiche didattiche quali quelle appena citate sono sopravvissute fino ai giorni nostri, probabilmente perchè la didattica della matematica non sembra sia stata soggetta a particolari impulsi o interesse fino al XIX secolo, con l'avvento dell'istituzionalizzazione delle conoscenze. L'Umanesimo aveva tuttavia portato con sé un forte interesse pedagogico, identificando l'insegnamento matematico come un possibile veicolo di conoscenze necessarie al nascente ideale di essere umano libero e consapevole, capace di costruire il proprio futuro (Millán Gasca, 2016). Nel XVII secolo, Comenius (Jan Amos Komensky, 1592-1670) aveva teorizzato nella *Didactica magna* la nascita di una scuola intesa come democratica, ossia rivolta a tutti i bambini e gli adolescenti, a prescindere dal ceto sociale, e capace di articolare l'azione formativa a partire dagli stessi alunni (Castelnuovo, 2017; D'Amore, 2000). La portata della sua proposta è evidente, se si considera che la matematica era allora destinata all'élite, legata a una conoscenza prettamente teorica e finalizzata a realizzare ponti e costruzioni o decifrare la volta celeste (Baccaglini-Frank, Di Martino, Natalini & Rosolini, 2018).

A cavallo tra il XVIII e il XIX secolo molti Paesi europei, unitamente agli Stati Uniti, avvertirono la necessità di provvedere all'istruzione di base che coinvolgesse il maggior numero possibile di bambini. A questo nuovo bisogno si accompagnava una profonda riflessione sui contenuti e sulle modalità dell'istruzione impartita. In ambito matematico, divenne urgente riflettere "non solo sul 'come', ma anche sul 'perché'", abbandonando l'antica pratica didattica basata sulle procedure in virtù di un ragionamento aritmetico (Ma, 2010, p. XI). Questo cambio di paradigma era mutuato dai cambiamenti che lo sviluppo della scienza moderna tra il XVIII e il XIX secolo portò in tutta Europa. In particolare ci fu una rinnovata considerazione della matematica, e delle discipline scientifiche in generale, non più per la loro utilità professionale, ma in quanto chiave di accesso alla conoscenza scevra da influenze religiose. La nuova fiducia nella *razionalità* umana si esprimeva con l'ideale di scienziato come colto, critico, dotato di strumenti intellettuali capaci di agire sulla realtà al fine di modificarla, proponendone una versione più equa e florida. Nacque infatti il concetto di *cittadinanza*, che portava con sé doveri, ma anche diritti inediti. In un clima di tale fermento, troviamo scienziati che prestarono particolare attenzione all'apprendimento infantile: Newton (1642-1726) suggerì un approccio creativo all'insegnamento dell'aritmetica, Eulero (1707-1783) scrisse in prima persona un libro di testo sul calcolo, incoraggiando lo studio sulla modalità di esposizione dei contenuti matematici, Alexis Clairaut (1713-1767), matematico e astronomo, propose l'insegnamento della geometria a partire dalle intuizioni degli studenti. Infine Condorcet, matematico (1743-1794) influenzato dagli ideali illuministi, sostenne presso l'Assemblea Legislativa Francese dell'aprile 1792 come ogni bambino fosse portatore di diritti, tra cui quello all'istruzione, mettendo in guardia da possibili asservimenti dell'istruzione di massa sia a interessi di parte (facendo particolare riferimento all'indottrinamento religioso), sia a scopi di immediata utilità: la scuola doveva assolvere al compito di formare cittadini capaci di comprendere e partecipare alla gestione della repubblica. Vennero quindi coinvolti scienziati per redigere un programma per le scuole francesi, mentre lo stesso Condorcet scrisse un libro di testo per i primi anni di scuola. Egli prevedeva un apprendimento ragionato, che indagasse le ragioni e puntasse all'autonomia del bambino in matematica, più che ricorrere a un apprendimento meccanico. Questo scritto ebbe forti influenze sugli insegnamenti matematici, innescando un rinnovamento nelle proposte didattiche per bambini. Tuttavia, la prassi d'aula non subì contaminazioni, restando ancorata a un apprendimento procedurale e legato alla numerazione. La motivazione di tale resistenza era duplice: da un lato vi erano impedimenti politici e sociali, dall'altro il Romanticismo ottocentesco, in risposta all'assoluta fede nella ragione dell'epoca precedente, innescò una visione diffidente della scienza illuministica, considerata come fredda, oltre a un potenziale rischio di disumanizzazione del mondo e dell'essere umano. Il rinnovamento proposto per gli insegnamenti matematici viene quindi ridimensionato, tornando a un'idea di apprendimento legata alla preparazione per la futura professione, fatta eccezione per gli studenti più abbienti, destinati a frequentare anche le scuole secondarie. Le prassi didattiche perdurarono quindi immutate, ma non in tutta Europa: alla fine del '700 sorsero in Svizzera le scuole di Pestalozzi (1746-1827), pedagogista e maestro che aveva abbracciato le idee illuministe. Egli si inserì nella realtà didattica a lui contemporanea, non per stravolgerla, ma piuttosto per modificarla, ottenendo così risultati incoraggianti. Nonostante la forte corrente romantica, nelle scuole dell'800 fu concesso spazio alla formazione scientifica proprio grazie all'influenza del pensiero pestalozziano. La sua visione dell'istruzione (detta del cuore, della mente e della mano), si distanziava dalle pratiche di memorizzazione meccanica, proponendo una preparazione ai mestieri e alla vita partendo dal reale per passare poi all'astrazione, che non prescindesse dalla considerazione del bambino come essere senziente e, soprattutto, sensibile. Rifiutò le punizioni e propose un'educazione morale di stampo romantico, al fine di offrire un futuro migliore a bambini meno abbienti e orfani. Suggerì un approccio precoce ai numeri e alle forme, suggerendo alle madri di proporre ai figli in età prescolare semplici giochi numerici e sostenne la rilevanza della geometria per l'avvicinamento dei bambini alla matematica. Le attività e i materiali educativi proposti da Fröbel (1782-1852) si innestavano proprio sull'idea di avvicinamento precoce alla matematica di Pestalozzi. Con i *doni* (giochi didattici dalla connotazione fortemente geometrica) egli auspicava di creare dei contesti educativi capaci di accompagnare il bambino nel passaggio alla scolarizzazione. Un terzo autore aveva negli stessi anni identificato la geometria come punto di primo incontro tra il bambino e la matematica: Séguin (1812-1880). Egli individuò nel movimento, nel tatto e nello sguardo il primo gradino per raggiungere le idee matematiche, allontanandosi così dalle pratiche punitive e basate sulla memorizzazione a lui contemporanee e proponendo materiali didattici fortemente geometrici, in pieno accordo con il lavoro di Fröbel (Millán Gasca, 2016).

Con il Positivismo riacquistarono interesse le scienze, con l'effetto collaterale di rianimare la riflessione intorno agli insegnamenti matematici infantili. Se da un lato si promuoveva l'effettiva attuazione di un'istruzione di base laica e aperta a tutti, dall'altro vi erano ancora forti resistenze, sia di tipo sociale (promuovere l'istruzione di massa avrebbe fatto venire meno le distinzioni tra classi sociali, che fino ad allora avevano influenzato la scuola) che ideologico (si temeva il confronto tra sapere scientifico e dottrina religiosa). La momentanea affermazione dell'una o dell'altra corrente ha comportato un avvicendarsi di disposizioni per la scuola, riscontrabile nei programmi di molti Paesi europei, tra cui l'Italia (Millán Gasca, 2016). Nella penisola, con l'entrata in vigore del decreto n. 3275 del 13 novembre 1859, detto Legge Casati, l'istruzione divenne pubblica, inserendosi nello slancio che aveva coinvolto gran parte degli Stati europei: la nascita della scuola pubblica viene fatta coincidere al 1774 in quello che diverrà l'Impero austro-ungarico, 1814 in Danimarca, 1838 in Spagna, 1842 in Svezia, 1870 in Gran Bretagna, 1881 in Francia (Westberg, Boser & Brühwiler, 2019). Emanato nel Regno di Sardegna da Vittorio Emanuele II, il decreto venne esteso al nascente Regno d'Italia e restò in vigore fino agli inizi del secolo successivo. Per tutto il periodo, fatte salve felici eccezioni quali le istruzioni speciali per l'Aritmetica e la Geometria contenute nei programmi scolastici di Gabelli del 1888, si susseguirono programmi per la scuola elementare che consideravano la matematica come una disciplina fortemente utilitaristica, riducendo l'aritmetica al conteggio e al calcolo (anche solo mentale) e la geometria al disegno e alla misurazione di figure. L'istruzione elementare mirava infatti ad alfabetizzare le masse in vista di una possibile rivoluzione industriale all'italiana, minimizzando il ruolo dell'insegnante in favore del programma (Castelnuovo, 2017; Pepe, 2016). Se è vero che con l'Unità d'Italia si assistè al coinvolgimento di matematici nel tentativo di trovare soluzioni sia istituzionali che scientifiche che migliorassero lo stato della scuola, va tenuto conto di come le risposte formulate abbiano avuto natura generica, con particolare attenzione alla logicità e all'aderenza dei contenuti didattici a quelli matematici, utilizzandone peraltro lo stesso linguaggio (Arzarello, Bartolini Bussi & Bazzini, 2013). Matematici quali Enriques, Peano e Vailati hanno affermato in diversi articoli come l'insegnamento matematico dovesse coinvolgere tanto l'intuizione, quanto il ragionamento logico, dichiarandosi contrari a una trasmissione prettamente teorica e distante dalla quotidianità degli studenti, con particolare riferimento ai primi apprendimenti formali. Nonostante le loro proposte abbiano denunciato la mancata attenzione da parte del mondo accademico per i problemi di natura didattica, furono le idee di Benedetto Croce e Giovanni Gentile ad avere di gran lunga maggiore risonanza. Venne quindi sostenuta un'idea di matematica meramente utilitaristica, giungendo a negarne ogni valore culturale (Bazzini, 2000).

È tuttavia opportuno sottolineare come almeno fino al 1923 non tutte le regioni risentissero di quest'influenza: Trentino Alto Adige e Friuli Venezia Giulia (entrambe nell'attuale macroarea del Nord Est italiano, interessata dalla ricerca illustrata nel presente lavoro di tesi) facevano a tutti gli effetti parte dell'Impero austro-ungarico, con peculiarità didattiche, organizzative e legislative distinte. In particolare, per volere dell'imperatrice Maria Teresa d'Austria, nel 1775 aprirono le prime scuole pubbliche, istituite capillarmente facendo riferimento ai registri battesimali delle parrocchie, ma presumendo allo stesso tempo la presenza di studenti non cattolici, per cui i maestri avrebbero dovuto rivolgersi agli esponenti delle rispettive religioni. In assenza di altri sistemi efficaci, quali i registri anagrafici, si riuscì così a garantire una scuola laddove fosse presente un gruppo di bambini in età scolare (Graifenberg, 2001). L'effettiva frequentazione dei bambini era garantita da numerose leggi in loro favore, quali un'ordinanza del 1823 che prevedeva il pagamento di multe da parte dei genitori inadempienti. La scuola assumeva quindi pieni poteri sulla formazione infantile. Per garantire un livello minimo di qualità didattica in ogni provincia dell'impero, l'imperatrice istituì e rese obbligatorio il *Methodenbuch*, testo a cui dovevano strettamente attenersi tutti gli insegnanti del regno, contenente disposizioni precise riguardo i piani di studio, le indicazioni didattiche, ma anche l'orario delle lezioni, gli argomenti da trattare nelle ore pomeridiane e l'educazione religiosa. Ciò implicava che l'apporto professionale di ciascun insegnante fosse minimo. Alla fine del XIX secolo, le scuole delle due regioni erano pienamente in linea con quelle mitteleuropee, mentre nel resto d'Italia la situazione era ben differente. Basti pensare che l'indice di analfabetismo in Trentino arrivava al 3,4%, mentre in Italia oscillava dal 42% dei piemontesi al 97% delle calabresi (de Fort, 2014). Con il trattato di Saint-Germain e l'annessione del 1919, la situazione si rivelò di grande fragilità: le scuole non furono esenti da attriti ideologici e politici. Si decise quindi di mantenere inalterate le caratteristiche fondanti della scuola, quali l'orario, i programmi, il calendario, la frequenza obbligatoria. Si mutarono i programmi di storia e geografia, adattandoli al nuovo contesto e cadde l'obbligo di nubilato per le insegnanti. Infine giunse il Regio Decreto del 7 gennaio 1923, n. 26 "Tutti i provvedimenti legislativi e i regolamenti italiani sono immediatamente applicabili ai nuovi territori e ci sarà bisogno di una dichiarazione in senso contrario perché i vari provvedimenti non siano applicati anche nelle terre redente", e la riforma Gentile ebbe così piena attuazione anche nelle nuove regioni e, come nel resto d'Italia, si dovette nel 1926 adottare il sussidiario voluto da Mussolini (Antonelli, 1998). In occasione del Congresso della Società italiana di scienze matematiche e fisiche "Mathesis, Associazione di studi fra gli Insegnanti di Matematica delle Scuole Medie", fondata nel 1895 con lo scopo di valorizzare l'insegnamento della matematica, furono evidenziate le differenze tra le metodologie di insegnamento nelle vecchie e nelle nuove province del Regno. Nelle nuove province avevano trovato diffusione metodologie maggiormente in linea con quanto avveniva a livello internazionale, in particolare ispirate alle teorie del matematico Klein e del fisico Mach, che conferivano maggiore centralità al discente, considerando fondamentale la sua comprensione più che il rigore matematico (Zuccheri & Zudini, 2012; Ambrisi, 2015). Nella Riforma Gentile e nei programmi di Aritmetica redatti da Lombardo-Radice (1923), prevarrà invece l'assunto per cui "chi conosce la materia, conosce anche il modo di insegnarla", spostando il focus sulla disciplina e non più sull'alunno (Bazzini, 2000, p. 80).

Eppure, è con il '900 che l'interesse per l'insegnamento della matematica varca i confini disciplinari e diviene soggetto di studi anche di chi non si occupava di matematica o pedagogia. Sulle orme di Séguin, Montessori (1870-1952), di formazione medica, scrisse nel 1909 *Il metodo della psicologia scientifica applicato all'educazione dell'infanzia*, in cui riprendeva i materiali proposti da Séguin, reinterpretandoli e aggiungendovi proposte didattiche rivolte agli insegnanti di matematica. L'idea montessoriana rimase in ogni caso circoscritta alle scuole che adottarono questo metodo. Non è infatti un caso che nel 1934 vennero dati alle stampe, in terra catalana, *Psicoaritmetica* e *Psicogeometria*: in Italia i testi non furono apprezzati né dagli insegnanti, per non essere immediatamente operativi, né dai pedagogisti, sia perché ancorati a una didattica che vedeva la disciplina, e non il discente, come oggetto di studi, sia perché la mente degli alunni non era considerata meritevole di attenzioni, tanto da trovare a fatica un editore disposto a pubblicarli, come testimoniato dalla stessa Montessori (2013/1934). Contemporaneamente, nel resto d'Europa, la psicologia ottenne invece ampio spazio nello studio dell'insegnamento, in primo luogo perché la matematica (e in particolare logica, geometria e problem solving) furono utilizzate per la costruzione dei primi test sull'intelligenza. In secondo luogo, la pubblicazione negli anni '20 dei testi *La nascita dell'intelligenza nel bambino e La rappresentazione del mondo nel bambino*, ad opera di Piaget (1896-1980), testimoniò l'inedita relazione che si strinse tra psicologia e didattica. In particolare, in quel periodo la didattica era considerata come una branca applicativa della psicologia e fu proposto un approccio quanto più possibile scientifico, al fine di sottrarre l'istruzione alla prassi scolastica, come si è visto rimasta immutata nei secoli, refrattaria alle influenze di scienziati e pedagogisti. Dewey (1859-1952), Piaget e Montessori fondarono a tal fine la Lega internazionale della nuova educazione (1921), promuovendo una revisione degli insegnamenti impartiti nelle scuole dell'obbligo.

I risultati ottenuti a inizio secolo furono tuttavia funestati dai gravi eventi storici contemporanei. L'Europa, in particolar modo a causa delle varie dittature, perse molti dei suoi studiosi, a beneficio degli Stati Uniti d'America, che ottennero un'inedita leadership in ricerca (Millán Gasca, 2016). Scoperte e sperimentazioni continuarono, pur tuttavia rinunciando al contributo europeo che tanto aveva concorso allo studio degli apprendimenti matematici di base fin dalla prima infanzia. La portata delle idee fiorite in quel periodo è riscontrabile nell'influenza che ebbero ad esempio in Asia: in Cina si sfruttarono i secoli spesi in ricerche sull'apprendimento, applicandone i principi nelle scuole di base (Ma, 2010). In Europa invece le intuizioni di scienziati quali Pestalozzi e Montessori furono confinate a un ristretto bacino di scuole. Idee come l'utilizzo di un nuovo linguaggio matematico, la rilevanza della geometria per gli apprendimenti di base e l'importanza del contatto tra bambini molto piccoli e matematica per i futuri apprendimenti furono accantonate per molti decenni (Millán Gasca, 2016). Una volta conclusa la Seconda Guerra Mondiale, si tornò ad occuparsi di pedagogia, e in particolare di *pedagogia popolare*. Freinet (1896-1966), pedagogista, nel 1957 fondò la *Féderation Internationales des Mouvements de l'École Moderne*, con l'intento di diffondere oltre confine i principi che avevano animato la École Freinet aperta nel 1935. Convinto sostenitore di un apprendimento fondato sull'*esperienza per tentativi*, vedeva la matematica come un'occasione per l'alunno di confrontarsi con sfide reali della vita quotidiana, attraverso quello che venne definito come *calcolo vivente*. Come già avvenuto in precedenza ad altri, la sua influenza si ridusse alle sole scuole ispirate ai suoi principi (Pepe, 2016; De Bock, Van Dooren & Verschaffel, 2020).

Nel frattempo in Italia, caduto il regime fascista, vennero approvati i Programmi di Aritmetica e Geometria, che restarono in vigore dal 1945 al 1955, in cui l'istruzione veniva considerata come antidoto non solo all'analfabetismo, ma anche ad "immaturità civile, impreparazione alla vita politica, empirismo nel campo del lavoro, insensibilità verso i problemi sociali in genere" (Pepe, 2016, p. 473). In questo contesto, nuova vita venne data agli insegnamenti matematici primari: "Per l'attuazione di questo piano educativo, che mira soprattutto a preparare il fanciullo alla vita civile, non è quindi sufficiente all'insegnante la sola cultura umanistica, su cui si è fatto finora quasi esclusivo assegnamento per la sua preparazione professionale" (*Ibidem*). I successivi programmi per le scuole elementari, datati 1955, riflettevano la necessità di fornire quanto prima agli alunni le conoscenze fondamentali per la vita: pur essendo la scuola media obbligatoria dalla Riforma Bottai del 1940, di fatto molti concludevano gli studi ancor prima della classe quinta (Ciarrapico, 2002). Tuttavia, un rinnovamento formativo coinvolse in prima persona gli insegnanti italiani, che furono chiamati a porre e risolvere problemi comuni in didattica della matematica (per fornire un esempio, *come è possibile insegnare la sottrazione con il resto?*). Si trattava in altre parole di descrivere situazioni comuni a qualsiasi docente, nel tentativo di trovare risposte pragmatiche, anche grazie al supporto di scienze quali la psicologia o la sociologia, che si concretizzassero in azioni didattiche da sperimentare in aula (Arzarello, Bartolini Bussi & Bazzini, 2013). È doveroso fare menzione al tema del Congresso indetto nel 1958 dalla Società matematica belga: "La responsabilità umana del professore di matematica": si riconosceva la rilevanza sociale degli apprendimenti matematici (Castelnuovo, 2017). Il rinnovamento che ebbe luogo trovò riscontro anche nella costituzione datata 1950 del Centro Nazionale per la Didattica e nella nascita di riviste inerenti alla didattica della matematica. Protagonista di questo periodo storico è senza dubbio Castelnuovo, la quale, studiando le teorie dei grandi autori della didattica attiva (tra tutti Dewey, Delacroy, Montessori e Pestalozzi), elaborò un modello di insegnamento matematico fondato sul passaggio dal concreto all'astratto, dal particolare al generale, che implicava creatività e partecipazione attiva da parte dello studente, costanti rimandi alla vita reale e la costruzione di apprendimenti che nascessero dall'osservazione degli oggetti matematici da parte dell'insegnante (Bazzini, 2013). Nacque quindi in Italia la trasposizione didattica: i contenuti matematici non andavano solo trasmessi, ma anche appresi, passando da un approccio top-down a uno bottom-up. Ciò implicò un maggior grado di complessità dei processi di insegnamento-apprendimento, per cui occorreva saper adattare il programma ministeriale alla realtà della classe in cui ci si trovava a insegnare. L'insegnamento assunse così la caratteristica di contestualità, implicando necessariamente una competenza professionale che si estendesse oltre i meri contenuti disciplinari, chiamata *arte dell'insegnare*, che non si esauriva con la formazione iniziale, ma trovava continuo rinnovamento e crescita nella collaborazione tra docenti, grazie alla condivisione di buone pratiche (Arzarello, Bartolini Bussi & Bazzini, 2013). Contemporaneamente, nel resto d'Europa, ebbe considerevole diffusione il movimento Bourbakista, in cui grande importanza assunsero gli insiemi quali concetti unificatori capaci di descrivere l'intera matematica, da intendersi tuttavia come propri dell'insiemistica (ambito didattico utilizzato alla scuola elementare) e non della teoria degli insiemi. A causa di un'apparente attinenza alle teorie piagetiane (seppur smentita dallo stesso Piaget), il movimento, definito come *Nuova Matematica*, ottenne discreto successo anche nella penisola, pur rimanendo a livello scolastico e non istituzionale (i Programmi Ministeriali successivi non ne subirono l'influenza). Attorno a esso si accese un forte dibattito che contrapponeva i sostenitori dell'insiemistica come veicolo di qualsiasi insegnamento matematico (come avvenne nelle scuole elementari francesi e belghe) a chi la considerava inutile o dannosa, oltre che distante dalle evidenze ottenute riguardo al pensiero infantile (Villani, 2012; Millán Gasca, 2016). Piaget prese posizione criticando quella che a tutti gli effetti si era tramutata in una moda didattica, che ebbe effetti negativi nei Paesi europei dove aveva trovato maggiore diffusione (Sitia, 1979; Ciarrapico, 2002).

Tra gli anni '70 e '90 ci fu un ulteriore rinnovamento negli insegnamenti matematici: nel 1975 il Consiglio Nazionale delle Ricerche costituì presso alcune università italiane i Nuclei di Ricerca Didattica, gruppi di ricerca in Didattica della Matematica, al fine di rinnovare l'educazione matematica, ponendo particolare attenzione alla formazione continua degli insegnanti. Essi elaborarono sperimentazioni didattiche, coinvolgendo in prima persona sia ricercatori che insegnanti. L'anno successivo il CNR promosse il progetto RICME-Rinnovamento Italiano del Curricolo di Matematica elementare in collaborazione con Mathesis, coordinato dal professor Pellerey. Conseguente-mente le stesse ricerche accademiche attinenti al mondo della scuola subirono una modificazione, differenziandosi e ottenendo identità autonoma (Ciarrapico, 2002). I nuovi programmi didattici per la scuola primaria (D.P.R. n. 104 del 12 febbraio 1985), presentarono invece per la prima volta il termine "matematica" anche per i primi anni di scuola, sottolineandone la valenza culturale e formativa. Proposero inoltre un tema inedito in Italia: la promozione di un atteggiamento positivo nei confronti della disciplina (Bazzini, 2013; Pepe, 2016). Questi programmi, che sostituivano quelli emanati nel 1955, furono finalmente affrancati dalla necessità di fornire nel minor tempo possibile ai bambini tutti quegli strumenti cognitivi utili alla vita futura, in quanto l'obbligo scolastico veniva ampiamente rispettato. Si articolavano in cinque temi: problemi; aritmetica; geometria e misura; logica; probabilità, statistica e informatica, e proponevano una progettazione per obiettivi (Ciarrapico, 2002). Alla loro stesura partecipò anche Giovanni Prodi, matematico, che darà impulso alla nascita della Didattica della Matematica in Italia, quale settore specifico di ricerca (Baccaglini Frank et al., 2018). A partire dagli anni '80 si sviluppò inoltre una riflessione circa la formazione iniziale degli insegnanti, che poneva delle critiche al modello degli anni '50: in luogo dell'arte di insegnare, venne avanzata un'idea di competenza professionale del docente e la necessità di una sua formazione continua (Arzarello, Bartolini Bussi & Bazzini, 2013). Eppure, nonostante la rinnovata attenzione alla professionalità docente, tra gli anni '80 e '90 si passò da un focus sull'insegnamento ad uno sull'apprendimento. Proprio in quegli anni vennero infatti definiti alcuni *strumenti-chiave* della didattica della matematica, che troveranno approfondita trattazione nei successivi capitoli, quali il contratto didattico, l'utilizzo di immagini e modelli, la riflessione su errori e misconcezioni (D'Amore, 2006). Nel decennio successivo, il ministero promosse un'azione di ricerca e disseminazione di metodologie innovative in didattica della matematica, coniugando la formazione continua degli insegnanti con le sperimentazioni in aula. Con il nuovo millennio trovò infine attuazione l'Autonomia amministrativa, organizzativa e didattica delle scuole (Ciarrapico, 2002). Nel 2007, dopo sei anni di lavori, verranno emanate le "Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione" (D.M. del 31 luglio 2007), aggiornate nel 2012 (D.M. n. 254 del 16 novembre 2012). Tre le linee che hanno guidato la loro stesura: l'essenzialità, la progressività e la continuità con il passato recente. Vengono quindi identificati i nuclei fondanti della materia, che fungono da *fil rouge* durante l'intero percorso scolastico, valicando ordini e gradi, al fine di favorire un apprendimento di qualità, alla luce delle conoscenze sin qui acquisite riguardo all'apprendimento matematico. I contenuti matematici sono suddivisi in nuclei tematici, ossia in contenuti specifici (il numero; lo spazio e le figure; le relazioni; i dati e le previsioni) e nuclei di processo, ovvero funzionali ai nuclei tematici (argomentare e congetturare; misurare; porsi e risolvere problemi). Viene posta fine alla dicotomia espressa nel corso di tutta la storia della didattica della matematica: la disciplina è investita di un duplice valore, strumentale da un lato, culturale dall'altro. Da un punto di vista prettamente didattico, le Indicazioni contengono alcuni suggerimenti, quali: a) considerare anche in aula il valore dicotomico della matematica, senza permettere che la formalità prevalga sulla strumentalità e viceversa, b) assicurarsi di far aderire i concetti matematici a una cornice di senso, c) rispettare la ciclicità degli insegnamenti o dedicare particolare attenzione e tempo ai salti cognitivi (Ciarrapico, 2002).Tali Indicazioni sono tutt'ora valide a applicate nelle scuole primarie italiane.

2.2 Nascita e definizione della Didattica della Matematica

La Didattica della Matematica (DdM), quale disciplina di ricerca a sé stante, nacque opponendosi al principio secondo il quale l'insegnamento fosse un'arte, e in quanto tale necessitasse di totale libertà creativa da parte di ciascun insegnante, esprimendosi al meglio se scevra da teorie e impostazioni di sorta. A fondamento della didattica moderna, vi sono infatti concetti psicologici (quali quelli riscontrabili nelle opere già di Comenius e Pestalozzi) che hanno portato la didattica ad essere considerata come scienza autonoma, interessata allo studio delle strutture mentali dei bambini in apprendimento (Castelnuovo, 2017). La stessa didattica generale ottenne maggiore autonomia dalla pedagogia al termine del secolo scorso, e ciò avvenne quando:

1. si ebbe la consapevolezza che per insegnare fosse necessario costruire strategie contestualizzate e, perciò, di come l'approccio professionale alla docenza fosse imprescindibile e accantonasse per sempre l'idea di un'arte dell'insegnare, per cui era sufficiente applicare meccanicamente teorie apprese, mediate unicamente dal buon senso;

2. si realizzò come fosse necessario instaurare una relazione nuova tra la teoria e la pratica del processo di insegnamento-apprendimento, caratterizzando sia l'azione didattica che la riflessione su di essa con la costruzione di conoscenza;

3. si comprese che i contenuti disciplinari fossero solo una porzione del sapere necessario al docente, che devono imprescindibilmente essere accompagnati da una sapiente trasposizione didattica;

4. la formazione continua richiese una professionalità docente capace di tracciare percorsi che valicassero ordini e gradi scolastici e si estendessero in una dimensione futura del soggetto in apprendimento.

La nascita della didattica generale (e delle sue estensioni, dette didattiche disciplinari) quale scienza autonoma si ebbe non tanto in risposta ai problemi permanenti nelle classi, come invece avvenne per la Didattica della Matematica, ma piuttosto in quanto la professionalità docente aveva subito profonde modificazioni e richiedeva nuovi modi di conoscere e agire nella relazione educativa (Rossi, 2011). La Didattica della Matematica, invece, ebbe origine proprio in seguito a una situazione comune nelle classi italiane: gli alunni di ogni ordine e grado spesso consideravano la matematica e il suo insegnamento noiosi e difficili, con conseguente origine dell'ansia matematica, oltre ad avere un'idea distorta della stessa matematica, quale costruzione perfetta (Castelnuovo, 2017). Quest'ultimo aspetto sembra in particolare essere dovuto alla volontà dei docenti di coprire il maggior numero di contenuti nel minor tempo possibile, prassi che si distanzia dalla natura stessa della matematica. Essa infatti è frutto di approfondite e rigorose riflessioni, che hanno portato a risultati spesso confutati, discussi e rivisti, mai accettati dogmaticamente. Assiomi e definizioni rappresentano infatti la mèta, non il punto di partenza, come invece sembra trasparire dalla pratica didattica. Quando invece le scienze matematiche vengono presentate come "un'estensione del senso comune con altri mezzi" (Ellenberg, 2014, p. 30), ossia uno strumento per comprendere la realtà e sapervi agire di conseguenza, esse assumono senso e significato anche per chi le apprende (Baccaglini Frank et al., 2018). Datare la nascita della Didattica della Matematica risulta impossibile, tuttavia le prime riviste specializzate comparvero negli anni '30 del secolo scorso. Se quindi la matematica si misura con una storia che dura millenni, la sua Didattica va contestualizzata negli ultimi decenni. Per questo motivo interessi e metodologie hanno subito negli anni forti variazioni. Come visto nel paragrafo precedente, i primi contributi furono per opera di matematici, che tuttavia si concentrarono sui nodi epistemologici della matematica, e di pedagogisti, che ebbero un'eco limitata a particolari scuole (Millán Gasca, 2016; Baccaglini Frank et al., 2018). Anche la definizione di Didattica della Matematica non è univoca, così come non lo è quella di didattica generale, pur essendo accomunate dall'interesse per i processi di insegnamento-apprendimento (Cavicchi, 2016). Per quanto riguarda la seconda, essa si incardina nella relazione educativa tra discente e insegnante, attuandosi primariamente nelle aule scolastiche, ed è socialmente connotata:

> "La didattica concerne una delle attività di mediazione più rilevanti, quella volta alla riproduzione del sapere sociale con il trasferimento da esperti a novizi all'interno di istituzioni predisposte a tale scopo. Essa gestisce tali mediazioni facendosi carico del complesso delle azioni progettuali, attuative, valutative e negoziativo-simboliche atte a favorire in modo efficace processi di costruzione di conoscenza; a tale scopo si avvale di specifici dispositivi formativi, opportunamente selezionati e allestiti." (Calavani, 2007, p. 18)

Non si limita dunque alla traduzione di teorie, ma discerne con consapevolezza gli strumenti e i mezzi più adatti a raggiungere i fini posti e definiti autonomamente. La sua origine non è mai rinnegata, ma anzi viene ancora definita come una scienza autonoma ma tuttavia strettamente legata alla pedagogia, da cui si distingue per la commistione di saperi teorici e pratici, la sua connotazione fortemente procedurale, metodologica e valutativa, in cui riflessione e azione sono intrinsecamente legate (Cerri, 2007). Il processo formativo avviene infatti sempre nell'interazione tra insegnante e alunno, ma anche tra di essi e gli oggetti dell'apprendimento, come descritto dal cosiddetto triangolo dell'insegnamento:

> "In quanto ramo autonomo dell'albero delle scienze dell'educazione, la didattica pone al centro della propria riflessione teorica-operativa l'interazione-comunicazione tra il soggetto che apprende, (il bambino come l'adolescente, l'adulto come l'anziano), e gli oggetti di apprendimento intesi sia come conoscenze, sia come modelli di apprendimento socio affettivo." (Frabboni, 1999, p. 3)

In ultima istanza, la didattica diviene la scienza deputata allo studio delle pratiche di insegnamento, non esaurendo tuttavia la sua azione al mero atto didattico:

> "Nell'assumere la didattica come ambito privilegiato del discorso sulla prassi dell'insegnamento, si deve però precisare che tale discorso, pur comprendendo come un proprio componente forte la questione della "tecnica" dell'insegnamento (o, se si preferisce, della "metodologia"), non si limita a essa. La concezione, secondo cui la didattica si esaurirebbe nell'apparecchiare soluzioni metodologiche in vista di obiettivi o di finalità, che le vengono consegnate da altri ambiti sapere o da altre sedi decisionali, è riduttiva e fuorviante. La didattica comprende come propria parte integrante anche la riflessione e la decisione circa gli obiettivi da raggiungere, le finalità verso cui tendere e le cornici di senso in cui si inquadrano questi obiettivi e le relative pratiche di insegnamento." (Baldacci, 2004, p. 15).

La didattica generale è quindi una scienza indipendente, che definisce domande di ricerca e detiene metodi di indagine propri, al fine di riflettere sul processo di insegnamento-apprendimento in un'ottica contestuale, sociale e circolare, secondo la quale l'azione educativa rimanda sempre a una riflessione e il contrario. In cosa quindi si differenzia la Didattica della Matematica? Essa è stata definita da Castelnuovo (2017) come ciò che il docente va costruendo durante le lezioni, lezioni in cui si trova ad assistere all'edificazione, da parte degli alunni, della scienza matematica. La Didattica della Matematica assume quindi un connotato disciplinare, che lega gli assunti validi per la didattica generale alle caratteristiche della materia d'insegnamento, ma è anche altro: un campo di ricerca. Quest'ultimo ha il fine di individuare fenomeni e processi capaci di influenzare insegnamenti e apprendimenti matematici, non limitandosi a descriverli, ma fornendo interpretazioni, motivazioni e indicazioni (D'amore, 1999). Ciò non è di poco conto, se si considera come l'unione tra didattica e matematica abbia stravolto la natura stessa della ricerca da sempre condotta in matematica. In altre parole, la ricerca in Didattica della Matematica è in larga misura influenzata da tre fattori che caratterizzano i solid findings a livello nazionale e internazionale, identificati nel corso delle ricerche in questo ambito:

1. contestualizzazione, ossia i risultati sono sempre dipendenti dal contesto educativo in cui sono situati;

2. complessità, in quanto la variabilità all'interno dei processi di insegnamento-apprendimento porta alle volte a risultati inaspettati o contraddittori;

3. ricerca qualitativa. Quest'ultimo fattore potrebbe stupire, in quanto la matematica, scienza dura, da sempre si accompagna alla ricerca di tipo quantitativo. La sua didattica, invece, per il fatto di essere fortemente contestuale, non può prevedere metodi che comparino dati ottenuti in contesti educativi distanti tra loro, e per questo le ricerche di tipo qualitativo superano numericamente quelle di tipo quantitativo.

Questo inedito modo di vedere alla realtà, portò Pollak a pronunciare la famosa frase "There are no proofs in mathematics education" (Schoenfeld, 2000, p. 1), in quanto da sempre i matematici considerano come prove (proofs) quelle ottenute con metodi quantitativi. In Didattica però, elementi quantitativi quali la riproducibilità degli esperimenti è sostituita dalla vicinanza dei risultati ottenuti con quelli raccolti in contesti simili. La caratteristica della contestualità impedisce spesso di riproporre sperimentazioni effettuate in situazioni specifiche in un qualsiasi altro ambito: come descritto nell'excursus storico, già all'interno della stessa Europa le proposte educative sono sempre state eterogenee. Questo approccio alla scienza potrebbe sembrare in contrasto con una delle caratteristiche della ricerca nelle scienze dure, la riproducibilità per l'appunto, e questo aspetto, tanto noto ai pedagogisti, incrina la fiducia dei matematici. La mancanza di riproducibilità degli studi potrebbe infatti essere considerata uno svantaggio per la scienza stessa, tuttavia recenti studi hanno dimostrato come essa si mantenga a livelli molto bassi anche in scienze dure quali fisica, chimica e ingegneria, mettendo in discussione l'idea stessa di riproducibilità degli esperimenti (Dreyfus, 2017).

Tra gli scopi della Didattica della Matematica, Schoenfeld (2000) ne identifica due generali e validi per qualunque studioso del settore: uno scopo puro (definito come scienza di base) e uno applicato (es., ingegneria). Se il primo si riferisce alla comprensione del pensiero matematico e al processo di insegnamento-apprendimento disciplinare, il secondo riguarda l'utilizzo delle evidenze ottenute dal primo al fine di migliorare la formazione matematica. Utilizzando una metafora, i due obiettivi, strettamente legati l'uno all'altro, sono comparabili alla pratica e alla ricerca medica: se uno dei due pilastri dovesse venire a mancare, anche l'altro crollerebbe, perdendo di senso, precisione, scopo. Questo assunto è particolarmente importante per una scienza spesso condotta da studiosi nati come matematici, con una forma mentis improntata alla ricerca di base. Da un punto di vista pedagogico, invece, la didattica espressa in aula può assumere molteplici forme, differenziando l'azione formativa di ogni singolo docente. La selezione delle caratteristiche assunte da questa azione avviene spesso in maniera implicita, talvolta inconscia. Una delle conseguenze storicamente immutate è che Didattica della Matematica e prassi didattica divergano. Nonostante ciò, la prassi didattica, pur risentendo di "mode didattiche" dalle alterne fortune, trova sempre fondamento in paradigmi pedagogici e didattici scientificamente validi, seppur non esenti da critiche (Trinchero, 2013). Anche la Didattica della Matematica, come la didattica generale e le altre didattiche disciplinari, affonda le sue radici epistemologiche nella pedagogia (Baccaglini Frank, et al., 2018). Saranno quindi di seguito illustrati i principali modelli didattici susseguitisi nel tempo, ma ancor oggi conviventi nelle scuole italiane, su cui la Didattica della Matematica è stata edificata.

2.3 Paradigmi teorici e declinazioni didattiche

Saranno di seguito illustrate le quattro principali teorie dell'apprendimento: comportamentismo, cognitivismo, costruttivismo ed enattivismo. Seppur non sia possibile definire con precisione la successione temporale delle teorie, a causa di sovrapposizioni e passaggi di difficile determinazione, saranno illustrate secondo l'avvicendamento avuto nel corso della storia.

2.3.1 Modello di didattica trasmissiva

La teoria dell'apprendimento

Il modello di didattica trasmissiva trova fondamento nella teoria dell'apprendimento detta comportamentismo. Esso considera la mente umana come una scatola nera priva di interesse scientifico, in quanto svolge unicamente la funzione di collegamento tra stimolo e risposta. Questa relazione, detta catena associativa, può variare infatti unicamente in intensità. La presente teoria ebbe origine quando nel 1913 John Watson, padre del comportamentismo, sostenne che la psicologia dovesse occuparsi solo di fenomeni osservabili e controllabili, e non della descrizione degli stati di coscienza (Farneti, 2013). Già nel 1879, Wundt aveva fondato la psicologia scientifica, aprendo un primo laboratorio a Leipzig, dove conduceva esperimenti utilizzando il metodo scientifico definito come *psicofisiologia* (Hwang, 2013). La mente umana, seppur non direttamente, venne quindi per la prima volta studiata con metodi scientifici: si svilupparono un gran numero di ricerche atte a studiare i meccanismi di base dell'apprendimento (Baccaglini Frank et al., 2018). I risultati di queste ricerche portarono a definire l'apprendimento come la modificazione di un comportamento basata su associazioni tra stimolo e risposta. In particolare, la modificazione, per essere considerata come appresa, deve essere duratura, basata sull'esperienza (e non ad esempio causata da una malattia) e deve essere una possibilità per il soggetto stesso, ossia la modificazione non deve essere già presente. L'apprendimento può in un secondo momento essere generalizzato o discriminato (Magro & Muffolini, 2011). Tra i maggiori autori del comportamentismo, troviamo poi Pavlov, padre del condizionamento classico. Il *condizionamento classico* consiste in un processo di apprendimento per cui il soggetto presenta una risposta riflessa causata da uno stimolo. La relazione tra lo stimolo e la risposta è l'apprendimento stesso: in un primo momento allo stimolo non corrispondeva la risposta cercata, che seguiva invece lo stimolo incondizionato. Tramite la presentazione congiunta dello stimolo incondizionato e dello stimolo "vuoto", la risposta allo stimolo incondizionato viene emessa anche alla presentazione del solo stimolo "vuoto" e lo fa divenire condizionato. L'apprendimento può quindi essere generalizzato, ossia estendersi a tutti gli stimoli simili, oppure discriminato, elicitando specifici stimoli a cui far seguire la stessa risposta (ad esempio presentando a un soggetto cani mansueti e cani aggressivi e simulando un attacco solo da parte dei cani aggressivi, si otterrà una risposta condizionata di paura solo in presenza di cani aggressivi). Il *condizionamento operante* di Skinner prevede, a differenza del condizionamento classico, rinforzi e punizioni. Se quindi il condizionamento classico presume una risposta riflessa a uno stimolo, il condizionamento operante propone il rinforzo di una risposta spontaneamente fornita dal soggetto (Farneti, 2013). Skinner, osservando come gli studenti provassero frustrazione e una conseguente disaffezione per le discipline in cui avevano difficoltà, elaborò dei *programmi di istruzione programmata*, ossia programmi strutturati in modo da ridurre quanto più possibile la possibilità di errore da parte del discente ed evitare pertanto emozioni negative nei confronti dell'oggetto dell'apprendimento. Il condizionamento operante si basa sul lavoro di un altro esponente del comportamentismo, Thorndike. Egli elaborò la *legge dell'effetto*, secondo la quale non sarebbe sufficiente che a uno stimolo corrisponda una risposta, bensì ciò che determina l'apprendimento è l'effetto sull'ambiente ottenuto dalla risposta stessa. Il rinforzo è dato dall'effetto ottenuto: se esso viene considerato come spiacevole o inconsistente, la connessione perde forza, in caso contrario diventa più stabile (Hilgard & Bower, 1970).

In termini generali, per i comportamentisti l'apprendimento è strettamente legato alla memoria, che ne funge da meccanismo di base, e può essere intenzionale (motivato), oppure incidentale (a prescindere dalla motivazione ad apprendere).

Per aver lavorato così estesamente sui meccanismi dell'apprendimento, oltre ad aver dominato fino alla metà del secolo scorso la psicologia negli Stati Uniti, il comportamentismo influenzò in larga misura l'azione didattica degli insegnanti anche in Europa (Farneti, 2013).

Il modello didattico

Il modello didattico trasmissivo, di derivazione comportamentista, vede il bambino alla stregua di un adulto in miniatura: apprendere significa condizionare l'apprendimento dell'individuo e l'assunto vale tanto per gli adulti quanto per i più piccoli. L'apprendimento viene quindi considerato da un punto di vista quantitativo: esso altro non è se non l'accumulo di apprendimenti consolidati tra stimoli e risposte, appunto dal *condizionamento*, mentre il fattore del cambiamento non è considerato come rilevante (Farneti, 2013). I progressi ottenuti dai bambini sono ritenuti come indice di un avanzamento uniforme e continuo nella conoscenza, senza prevedere alcun tipo di scostamento dal cammino tracciato dal docente (Riffert, 2018).

Nelle classi in cui viene adottato un modello didattico di tipo comportamentista, la matematica viene insegnata con istruzioni dirette, richiedendo la memorizzazione tramite la ripetizione di fatti e procedure. L'ambiente esterno contribuisce all'apprendimento nella misura in cui offre stimoli a cui l'individuo risponde, attuando un comportamento di risposta specifico. Sono quindi le condizioni esterne al discente ad ottenere maggiore attenzione da parte sua, come ad esempio i premi e le punizioni, che determinano secondo questa teoria il corso dell'apprendimento. Dal momento che il focus è diretto ai comportamenti oggettivamente osservabili e misurabili, l'attività mentale non viene considerata. Di conseguenza, secondo i comportamentisti, il fatto che un alunno non attribuisca un significato al proprio percorso di apprendimento non è rilevante: il senso è separato dall'esperienza di apprendimento. Ogni finalità non riguarda il soggetto e la sua motivazione, ma è piuttosto suddivisa in termini specifici e osservabili di comportamento definiti dal docente. Il ruolo dell'insegnante è pertanto centrale: egli pone gli obiettivi, prepara il contesto, presenta gli stimoli, interagisce con gli alunni. I discenti assorbono passivamente gli stimoli forniti dall'insegnante, con il solo compito di prestare attenzione. In altre parole, l'approccio al ragionamento matematico supportato dal comportamentismo è di tipo deduttivo (Rai, 2018).

Limiti

Nel 1973, Erlwanger sottopose a uno studio un alunno di 12 anni che aveva precedentemente partecipato a un programma scolastico individualizzato (Individually Prescribed Instruction) di stampo comportamentista, e che era considerato dal suo docente tra i più bravi in matematica. Lo sperimentatore sottopose al ragazzo una serie di calcoli, controllando la correttezza dei risultati. Si accorse così che l'alunno compiva alcuni errori inaspettati, come ad esempio $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} = 1$. Condusse quindi delle interviste, da cui emerse come il ragazzo applicasse alla somma di frazioni regole diverse, ottenendo risposte alle volte corrette, altre no. In altre parole egli adattava le procedure conosciute a nuovi contesti, costruendo nuovi algoritmi che gli permettevano di fornire una risposta: utilizzava ad esempio $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, ma anche $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, ottenendo un risultato corretto quando il denominatore era lo stesso e perdendo totalmente il controllo su di esso quando il denominatore era diverso. Con questa ricerca Erlwanger mise in discussione il modello comportamentista per l'insegnamento della matematica, introducendo nuovi metodi per la ricerca stessa in Didattica della Matematica, quale lo studio di caso con l'utilizzo di interviste, al fine di comprendere le convinzioni (*beliefs*) di bambini e ragazzi nei confronti della matematica che, come emerso grazie allo studio, possono risultare disfunzionali all'apprendimento. Nonostante queste evidenze, il modello didattico trasmissivo, che consiste in un apprendimento riproduttivo (applicare procedure algoritmiche riproduttive, senza lavorare sulle competenze produttive, come ad esempio il problem solving) caratterizza tutt'oggi una buona parte dell'insegnamento matematico (Baccaglini Frank et al., 2018).

2.3.2 Modello di didattica cognitivista

La teoria dell'apprendimento

Il cognitivismo nasce in America in risposta al comportamentismo e si propone come un nuovo approccio alla costruzione della conoscenza. Se quindi il comportamentismo aveva definito i processi cognitivi come una *scatola nera* in cui fosse irrilevante qualsiasi tipo di indagine scientifica, il cognitivismo decide di aprire la scatola e osservare cosa contenga (Farneti, 2013). A partire dalla metà del secolo scorso, per influenza degli studi allora condotti in Europa, scienziati americani quali Bruner, il cui contributo risulterà di fondamentale importanza per il costruttivismo, iniziarono a interrogarsi su come "riportare la mente all'interno del dominio delle scienze umane" (Bruner, 1990, p.19). Non ci si doveva più limitare a osservare e regolare il comportamento attraverso stimoli e risposte, ma si doveva comprendere il significato che vi soggiaceva. Pur mantenendo il rigore metodologico inaugurato dalla stagione comportamentista, i cognitivisti indagarono i processi messi in atto dal soggetto per risolvere problemi, alla luce dell'influenza delle recenti scoperte, quali la teoria degli automi di Turing del 1936, la teoria della comunicazione di Bell del 1937 e la metafora da parte di McColloch e Pitts della mente umana come un computer che elabora informazioni del 1943. L'attività neurale umana venne infatti comparata al flusso elettrico presente in un automa, gli stimoli erano così considerati input e le risposte output (Farneti, 2013). Contrariamente al comportamentismo, ciò che interessava i cognitivisti erano le procedure di elaborazione dei dati: Neisser, uno dei padri del cognitivismo, nel 1967, spiegò, attraverso un parallelismo con l'informatica, come gli psicologi cognitivisti fossero interessati alla comprensione dei software presenti nella mente umana, piuttosto che all'hardware. Un altro esponente del cognitivismo, Herbert Simon, introdusse il concetto di razionalità limitata (1978), sostenendo come gli esseri umani, che non dispongono né dei fatti sufficienti, né di una solida struttura di valori, né di un forte potere di ragionamento, abbiano la tendenza a soddisfare piuttosto che ottimizzare. Ciò significa che nel mondo reale le decisioni vengono prese in base a vincoli spesso ineludibili.

Con soddisfazione qui si intende una soluzione che risponda in maniera sufficientemente efficace a condizioni di tempo, conoscenza e capacità cognitive limitate (da qui l'espressione razionalità limitata). Per fornire un esempio, una persona desiderosa di stringere nuove amicizie generalmente non condurrebbe un'indagine su larga scala, ma piuttosto sceglierebbe come nuovo compagno il primo individuo che soddisfi sufficientemente le sue aspirazioni. Non analizzerebbe quindi ogni possibile alternativa, controllando ogni variabile, stimando la probabilità in relazione a ogni possibile esito e scegliendo infine il soggetto che abbia ottenuto il punteggio migliore. Questa teoria venne accettata in vari settori, tra cui l'economia comportamentale, la medicina e appunto la psicologia cognitivista, in quanto, pur non essendo ottimale, la razionalità limitata è di fatto funzionale in un mondo fortemente complesso quale quello attuale (Ekkekakis & Zenko, 2016).

In ogni caso, più che ai quadri generali, il cognitivismo si è interessato alle microricerche di settore, con quadri teorici meno definiti e restrittivi (Farneti, 2013). Tra queste troviamo gli studi inerenti alla *teoria della comunicazione*. Con questo termine, che non fu utilizzato in maniera consistente fino agli anni '40, ci si riferiva in primo luogo ad alcuni campi dell'ingegneria elettrica, tra i quali la teoria dell'informazione e la cibernetica. A partire dagli anni '50, l'avvento dell'istruzione audiovisiva comportò un crescente interesse nei confronto di teorie, o modelli di comunicazione, che descrivessero il processo stesso di comunicazione. Uno dei modelli più significativi fu quello di Shannon e Weaver. Nel 1949 essi definirono la comunicazione come un processo che coinvolge un mittente, un destinatario, un messaggio, un canale e un mezzo attraverso il quale viene inviato il messaggio. Queste sette componenti sono i requisiti minimi affinché il processo di comunicazione avvenga, ma non sono sufficienti: è necessario che mittente e destinatario condividano segni comuni per potersi trasmettere informazioni a vicenda (figura 2.1).

In altre parole, la comunicazione venne definita come *elaborazione di informazioni*, traendo spunto dalla tradizione cibernetica in cui questo modello si inseriva. Il modello si rifaceva per l'appunto a media quali il

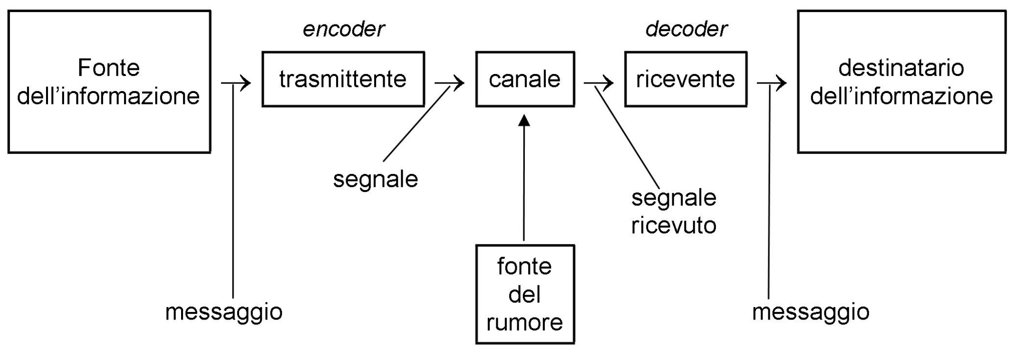


Figura 2.1

telefono, la radio o il televisore, utilizzati in quel periodo, e non solo, per la comunicazione di massa. Se quindi la comunicazione era la trasmissione unidirezionale di informazioni attraverso un canale da una trasmittente a un ricevente, divenne rilevante ridurre il più possibile il rumore che potesse compromettere efficacia e accuratezza della comunicazione. In particolare, gli autori identificarono quattro differenti tipi di rumore: rumori fisici, quali la temperatura troppo elevata in aula oppure un rumore di disturbo proveniente dall'esterno; rumori psicologici, come pregiudizi o attribuzioni nei confronti di una disciplina o persona; rumori biologici, ossia malessere, senso di fame o di fatica; rumori semantici, cioè l'utilizzo da parte del trasmittente di uno specifico gergo o di termini non comuni e quindi non comprensibili per il destinatario (Kubota, 2019).

Un ulteriore settore di interesse per i cognitivisti è rappresentato dalla percezione: Marr, un altro esponente del cognitivismo, definì la visione come un processo capace di elaborare una descrizione utile all'osservatore a partire da immagini del mondo esterno (1982). In altre parole, la rappresentazione avverrebbe in quattro fasi (immagine, sketch primario, sketch a $2\frac{1}{2}$ D, sketch a 3D), attraverso le quali le informazioni relative all'oggetto osservato aumentano, permettendo di riconoscerlo a prescindere dall'orientamento dell'oggetto rispetto all'individuo. Biederman (1987), riprendendo questo modello, postulò l'esistenza di *geoni*, detti anche primitivi, ossia semplici forme in due o tre dimensioni, che cosituirebbero la base della percezione degli oggetti. Ciascun oggetto esistente sarebbe riproducibile utilizzando uno o più dei 36 *geoni* identificati da Biederman. Di conseguenza, fintantochè i *geoni* sono distinguibili in una figura, essa è visibile e comprensibile alla percezione umana.

Oltre a temi inediti, quali appunto la percezione, troviamo anche interessi comuni al comportamentismo, quali la memoria. Ma se nel cognitivismo l'attenzione per la memoria resta, essa muta rispetto alle teorie precedenti: da componente di base per l'apprendimento qual era, si riconosce che essa può assumere differenti funzioni. Vengono quindi studiati i processi di accumulo di informazioni formulando modelli per la memoria. Atkinson e Shiffrin elaborarono nel 1968 un primo modello, secondo il quale esisterebbero tre sistemi di memoria: registro sensoriale, memoria a breve termine e memoria a lungo termine. Il processo di memorizzazione consiste dunque nell'elaborazione, da parte dei tre sistemi, delle informazioni in ingresso, codificandole e conservandole (le tre fasi di codifica, immagazzinamento, recupero). A questo primo modello ne faranno seguito molti altri, tra i quali assume rilevanza il modello di Baddeley e Hitch del 1974, in cui il concetto memoria a breve termine viene sostituito da quello di *memoria di lavoro* (ML). La ML é un sistema che consente di mantenere in memoria per brevi periodi delle informazioni e permette di manipolarle durante lo svolgimento di compiti cognitivi. Questo modello rifletteva l'interesse del cognitivismo per il problem solving: oltre alla memoria, vi era infatti molta attenzione per lo studio di strategie di risoluzione di problemi, al fine di esaminare le strategie stesse messe in atto (Farneti, 2013). Nel 1956, basandosi su studi sulla percezione e sulla memoria, Miller arrivò ad affermare come la memoria a breve termine avesse un numero limitato di chunks, pari circa a sette. Con chunk qui si intende un insieme di elementi accomunati tra loro e distinti da altri insiemi. Quando la quantità delle informazioni aumenta, l'essere umano le elaborerebbe quindi componendo chunks più grandi, piuttosto che aumentare il numero di chunks per mantenerne inalterata la capienza (Miller, 1956). Questo meccanismo, definito per l'appunto *chunking*, si riferisce al processo mediante il quale unità di informazioni più piccole vengono raggruppate in unità maggiori, detto raggruppamento dinamico. La *memoria di lavoro*, avendo capacità limitata, sfrutta questo meccanismo non solo per la memorizzazione, ma bensì per molti altri processi cognitivi, quali l'apprendimento, la percezione e lo sviluppo di competenze, oltre che per la comprensione e la produzione di stringhe linguistiche (Niu & Osborne, 2019).

Il modello didattico

Il modello didattico cognitivista vede l'alunno come un soggetto che apprende quando elabora le informazioni. L'apprendimento è dunque dato dall'acquisizione, il trattamento e l'immagazzinamento di input. L'allievo detiene pertanto una parte attiva nel processo di insegnamento-apprendimento, mentre il ruolo dell'insegnante è quello di fornire contesto e input adeguati, favorendo strategie ed euristiche che permettano di facilitare l'elaborazione di stimoli e concetti (Baccaglini Frank, et al., 2018). Nello specifico, Novak si interessò a come i discenti potessero ottimizzare questo processo: a cavallo tra gli anni '70 e gli anni '80 intraprese con il suo gruppo di ricerca uno studio volto a indagare la mappatura concettuale come strategia grafica organizzativa e di meta-apprendimento, che sostenesse lo studente durante la configurazione della conoscenza. La teoria di riferimento era quella di Ausubel (1968), secondo la quale l'acquisizione della conoscenza avviene attraverso l'assimilazione di nuovi concetti in quadri concettuali esistenti. Perciò, con la mappatura dei concetti, lo studente organizzerebbe i concetti acquisiti in reti e le reti in diagrammi assimilabili a diagrammi di flusso gerarchico, ossia tali da procedere dal concetto generale più inclusivo a quelli subordinati più specifici (Novak & Musonda, 1991). In una mappa concettuale sono presenti nodi, collegamenti, proposizioni, gerarchie e collegamenti incrociati. I nodi rappresentano i concetti, che sono espressi tramite etichette contenenti una breve frase o parole chiave, mentre i collegamenti tra i concetti sono rappresentati da linee direzionali che collegano i nodi tra loro, indicando se il tipo di relazione che intercorre sia di natura temporale o causale. Nodi e collegamenti possono dare luogo a proposizioni, che sono per l'appunto costituite da due o più nodi collegati tra loro e accompagnati da parole di descrizione al fine da rendere significativo il nesso. Le gerarchie invece definiscono i livelli all'interno della mappa, passando da quello più astratto a quello più specifico. Infine i collegamenti incrociati sono utilizzati per congiungere concetti spazialmente distanti all'interno della mappa, ma che rappresentano il riconoscimento di ampi collegamenti all'interno del medesimo argomento. Dal punto di vista didattico, analizzare le mappe concettuali costruite dagli studenti restituisce al docente informazioni relative alla comprensione e alla costruzione di conoscenze, in particolare se si considerano i collegamenti realizzati tra concetti subordinati, e le etichette attribuite. Essi infatti tratteggiano l'immagine delle relazioni tra i concetti all'interno delle conoscenze dell'alunno, fornendo di fatto la fotografia dell'organizzazione degli apprendimenti (Mayo, 2018). Oltre al contributo che la mappatura dei concetti offre all'insegnante, è rilevante sottolineare come numerosi studi abbiano dimostrato che l'applicazione di questa tecnica in aula può avere un'influenza positiva sulla qualità dell'apprendimento degli studenti (Kinchin, 2020).

Tuttavia, Novak non fu l'unico cognitivista a interessarsi dei processi di insegnamento-apprendimento: Bandura sviluppò la *teoria dell'apprendimento sociale*. Secondo tale teoria, l'apprendimento non consiste unicamente in un contatto diretto con la realtà, ma si forma anche a partire da esperienze indirette, nate dall'osservazione. Quando un soggetto adatta il proprio comportamento sulla base di quello osservato in altri, sta attuando il *modellamento (modeling)*, ossia apprende dall'osservazione (Magro & Muffolini, 2011). Nel 1996, l'*apprendimento osservativo* di Bandura ha ottenuto l'apporto di un'importante scoperta fatta nel campo delle neuroscienze: i neuroni specchio (Rizzolatti). Nella corteccia premotoria della scimmia sono stati trovati alcuni neuroni che si attivano sia quando il soggetto compie in prima persona una specifica azione, sia quando osserva altri individui compiere quella stessa azione. Questi neuroni costituiscono quindi un meccanismo grazie al quale è possibile comprendere e prevedere il comportamento altrui (Magro & Muffolini, 2011).

Per quanto invece riguarda nello specifico la Didattica della Matematica, il cognitivismo non prestava attenzione solo ai processi riproduttivi, come ad esempio la memorizzazione di formule, ma anche a quelli produttivi, tra tutti il problem solving, fino ad allora ignorati dal comportamentismo (Farneti, 2013). Chi e Glaser (1980) si interessarono infatti ai processi e alle strategie influenzati dall'*expertise*, ossia l'essere esperti in uno specifico dominio. In particolare, riferendosi al problem solving, essi operarono una distinzione tra individui esperti e inesperti, definendo come i primi fossero favoriti nei processi risolutivi in quanto avvantaggiati nel richiamo, e quindi nell'applicazione, di regole note, soprattutto grazie alla capacità di considerare un maggior numero di variabili in gioco. I bambini più esperti analizzerebbero cioè i problemi presentati ricercando procedimenti appresi in precedenza e selezionerebbero conoscenze pregresse utili alla risoluzione (Cherubini, 2005). Chi, Hutchinson e Robin (1989) dimostrarono inoltre come un maggior bagaglio di saperi avesse un effetto positivo sulle capacità di ragionamento degli alunni, in quanto permetterebbe loro di elaborare delle spiegazioni di tipo causa-effetto, grazie alle quali sarebbero in grado di produrre inferenze. Le conoscenze accumulate permetterebbero quindi da un lato di riconoscere esperienze già vissute in precedenza, dall'altro libererebbero risorse mentali per lo studio del problema. Tuttavia, saper utilizzare strategie ottimali dipende anche dal grado di sviluppo delle conoscenze metacognitive. Ogni bambino dispone in altre parole di un bagaglio di conoscenze relative alle proprie attività cognitive che gli permette di avere il controllo su di esse (Flavell, 1981). La metacognizione consentirebbe dunque di pianificare le attività, monitorandole e verificandole. Cio è particolarmente rilevante nel problem solving, dove la risoluzione richiede molteplici fasi, che aumentano il grado di complessità del compito (Macchi Cassia, Valenza, & Simion, 2013).

Limiti

Il cognitivismo oggi è sempre più vicino alle neuroscienze, al fine di comprendere la relazione tra processi analizzati e processi cerebrali sottostanti: c'è, in altre parole, un rinnovato interesse per l'hardware del pensiero umano, ma anche animale. Tuttavia, la maggior critica al cognitivismo, mossa dagli stessi Neisser e Bruner, è di non essere ecologico, cioè di non tenere sufficientemente conto dell'influenza delle condizioni variabili nel qui ed ora sull'apprendimento (Farneti, 2013). Un altro limite strutturale consiste nella relativamente scarsa attenzione al processo di insegnamento, rispetto al processo di apprendimento. Infatti, pur avendo definito in maniera molto utile i processi mentali in atto nel discente che impara e nel docente che insegna, si trovano molti meno studi sulla relazione tra metodi di insegnamento e risultati nell'apprendimento.

2.3.3 Modello di didattica costruttivista

La teoria dell'apprendimento

Il costruttivismo, che da un punto di vista prettamente teorico rende l'approccio comportamentista superato, si fonda sui principi sanciti da von Glasersfeld. Egli, rifacendosi a Gianbattista Vico, afferma come da un lato il soggetto cognitivo non riceva la conoscenza passivamente dall'esterno, ma ne sia attivo fautore; dall'altro la conoscenza si attui in un processo adattivo capace di organizzare il mondo esperito dall'individuo. Il mondo stesso non è quindi più indipendente, pre-esistente ed esterno alla cognizione del soggetto. In altre parole, riprendendo quelle del Vico, "verum ipsum factum", conoscere significa fare, ossia la conoscenza deriva da un atto costruttivo (Farneti, 2013). Già Kelly aveva posto le basi della teoria conosciuta come *alternativismo costruttivo,* la quale, distinguendosi sia dalla psicoanalisi che dal comportamentismo, intendeva l'essere umano come uno scienziato. L'*uomo-scienziato* non si limiterebbe a reagire passivamente a impulsi, ma piuttosto immaginerebbe il suo mondo attraverso una lente di significato che è caratterizzato dalla sua conoscenza, nel tentativo di prevedere quali eventi futuri si potrebbero manifestare e cercando il modo di gestirli (Kelly 1955). La struttura umana venne considerata come lungamente più complessa di un qualsiasi dispositivo automatico. L'interazione tra l'essere umano e il mondo esterno presupponeva inoltre l'esistenza di tre ipotesi:

1. esistenza del mondo reale e approccio graduale da parte della persona alla sua comprensione;

2. integrità del mondo, cioè esso agisce come un insieme composto da ogni sua parte, non riducibile però alla somma delle parti;

3. moto del mondo lungo l'asse del tempo, mutando se stesso, ossia il mondo non è stabile e la vita cambia con il tempo come qualsiasi altra cosa.

L'essere umano non deve pertanto conformarsi a rigide regole razionali, ma dovrebbe piuttosto essere considerato attraverso l'evoluzione del suo pensiero, tenendo conto delle sue abilità creative per rappresentare l'ambiente e non semplicemente rispondervi in maniera passiva. E dal momento in cui è capace di rappresentare l'ambiente in cui vive, può modificarlo, al fine di renderlo migliore per se stesso. Questo processo implica quindi che l'individuo costruisca il proprio mondo e questa abilità non solo sarebbe propria degli esseri umani, ma anche di tutto il regno animale. Il comportamento non è più quindi una mera risposta a uno stimolo, ma diviene una scelta consapevole di azioni, implicite o esplicite, in linea o in contrasto con quanto agito fino a quel punto, ragionate o date dalla percezione attraverso i sensi. Di conseguenza, è possibile evincere le idee principali che sottendono all'alternativismo costruttivo: l'essere umano interpreta sempre gli eventi che si verificano, inoltre, qualsiasi evento può essere interpretato in modo diverso e qualsiasi processo di interpretazione richiede strumenti adeguati. Ciò avviene in quanto ogni individuo applica al mondo da lui percepito schemi mentali preesistenti (definiti come *costrutti personali*) e tenta di adattarli alla realtà che gli si presenta, al fine di adattare il proprio comportamento (Danielyan, 2017). Una delle maggiori critiche mosse dai costruttivisti alle teorie comportamentiste riguarda infatti l'oggettività e il realismo postulati. Mead e von Foerster introdussero la cosiddetta cibernetica di secondo ordine, o la cibernetica della cibernetica, con lo scopo di spostare l'attenzione dai sistemi osservati ai sistemi di osservazione. Con essa si promosse un rinnovamento epistemologico, secondo cui la psicologia (e le scienze della formazione) andassero rappresentate come scienze radicalmente riflessive, in cui gli osservatori descrivessero i propri processi di osservazione e auto-organizzazione (Goldstein, 2017). Von Foester in particolare evidenziò come la cognizione umana fosse da considerarsi senza distinzioni tra le funzioni di ordine inferiore e superiore, favorendo lo sviluppo di una teoria della conoscenza capace di sostenere l'autonomia e riconoscere la complessità umana. I comportamenti messi in atto dagli individui sarebbero infatti il frutto di un processo concatenato che definisce in maniera riflessiva la loro organizzazione (von Foerster, 2002).

Ciò che il comportamentismo non era riuscito a spiegare, come ad esempio il motivo per cui due bambini, posti nella medesima condizione di apprendimento, ottengono risultati discrepanti, diviene quindi oggetto di studio del costruttivismo (Delval, 2006). Tra coloro che tentano di fornire una risposta troviamo Piaget, che nella sua epistemologia genetica definisce l'apprendimento come un processo in cui si equilibrano le fasi di assimilazione, accomodamento e organizzazione. In altre parole, il soggetto apprende quando si *adatta* all'ambiente. L'intelligenza viene quindi considerata come la "forma più evoluta di adattamento all'ambiente" (Farneti, 2013, p.40). Le teorie di Piaget sono fortemente ecologiche: se da un lato non vi è soluzione di continuità tra la biologia e la psicologia, tra le strutture organiche e le strutture dell'intelligenza, dall'altro la conoscenza stessa deriva dall'interazione tra il soggetto che apprende e l'oggetto da apprendere: il bambino costruisce la propria conoscenza interagendo con l'ambiente che lo circonda. Questo assunto avrà enorme risonanza in Didattica della Matematica, disciplina in cui l'oggetto del sapere (appunto gli oggetti matematici) è intrinsecamente irraggiungibile dall'individuo se non attraverso l'astrazione, come sarà approfondito nel paragrafo "Noetica e semiotica" (Delval, 2006; Baccaglini Frank et al., 2018). Lo studioso svizzero propose inoltre alcuni esperimenti, sottoposti a migliaia di bambini, al fine di definire con esattezza quali conoscenze e abilità vengano acquisite in determinate fasi di crescita, giungendo a distinguere precisi *stadi* evolutivi che articolano età, conoscenze e abilità nel corso della crescita di ogni bambino. Per quanto riguarda gli apprendimenti matematici, vennero definiti alcuni assunti che ebbero, ed hanno tuttora, grande impatto sulla Didattica della Matematica. Si tratta in particolare dell'esperienza della conservazione degli insiemi, che portò alla conclusione per cui il bambino non può comprendere, e quindi manipolare, il concetto di numero fino a che non abbia interiorizzato la legge di conservazione degli insiemi, ossia la legge dell'invarianza del numero. In altre parole, prima del compimento del sesto anno di età, i bambini non sarebbero in grado di manipolare quantità numeriche e gli apprendimenti ad esse inerenti dovrebbero essere proposti solo a partire dalla scuola primaria. L'esperienza dell'ordinamento in serie conferma lo studio appena descritto, aggiungendo che la manipolazione mentale di un numero prevede la comprensione della legge di seriazione. Ossia, fino ai 5-6 anni, i bambini non riescono a seriare con efficacia oggetti concreti e, di conseguenza, non è possibile che sappiano seriare numerosità crescenti. Piaget postula quindi l'inedita teoria secondo la quale il bambino non può costruire concetti numerici se prima non siano da lui stati raggiunti specifici prerequisiti (Castelnuovo, 2017).

Tra i maggiori esponenti del costruttivismo, è poi annoverato Vygotskij, autore del socio-costruttivismo, ossia di una teoria dell'apprendimento secondo la quale l'individuo è sempre calato in un contesto socioculturale e solo tenendo conto di questo contesto possiamo comprendere il comportamento del soggetto. La crescita di un bambino prevede quindi non tanto il superamento di alcuni stadi, come postulato da Piaget, ma piuttosto l'acquisizione di valori, conoscenze, credenze, convenzioni che permettono al bambino di entrare a far parte di una società. A tal fine assumono rilevanza i sistemi simbolici condivisi, in altre parole il linguaggio, ma anche il sistema numerale adottati nello specifico contesto. Apprendere questi sistemi simbolici favorisce la socializzazione, che è a sua volta motore e *conditio sine qua non* di apprendimento. Nel 1934, Vygotskij (2016) definì due linee evolutive distinte: i processi elementari, biologici, e le funzioni psichiche superiori, socioculturali. Processi elementari e funzioni psichiche agiscono in simbiosi, permettendo al bambino di svilupparsi e apprendere, ma ciò che assume maggiore rilevanza è il linguaggio, in quanto permette la socializzazione e quindi il passaggio tra un comportamento esterno (sociale) ad uno interno (interiore). Le funzioni psichiche superiori risiedono infatti nella società e sono processi che da interpsicologici divengono intrapsicologici. L'apprendimento risiede pertanto nella società stessa ed è lei a influenzare la forma della conoscenza ottenuta dagli individui che la compongono. In altre parole la conoscenza, in quanto socializzata, non influenza solo il contenuto degli apprendimenti, ma anche il modo di pensare degli individui. Ulteriori fondamentali contributi di Vygotskij allo studio dell'apprendimento, sono i ben noti concetti di *zona di sviluppo prossimale* e *scaffolding*, che definiscono la relazione educativa tra adulto e bambino come un processo complesso ma guidato, capace di ridefinire le funzioni del comportamento infantile. L'apprendimento non è riducibile a un accumulo quantitativo di informazioni, ma piuttosto è definito come volano di crescita (Delval, 2006; Baccaglini Frank et al., 2018). Vygotskij condivise con Wenger l'attenzione dedicata al contesto sociale e la convinzione che esso determini il percorso di apprendimento di ciascuno, pur con prospettive divergenti. Wenger infatti sosteneva che l'essere umano sia sempre situato in una relazione sociale e che l'appartenere a una comunità di pratica sia imprescindibile per il suo apprendimento, in accordo con la teoria dell'apprendimento sociale. Con comunità di pratica qui si intende un gruppo di persone che siano reciprocamente coinvolte all'interno di una "impresa negoziata" e che dispongano di un "repertorio di risorse negoziabili" (Wenger, 1998, p. 126). La pratica è quindi considerata a un livello di analisi e di esperienza che rifletta l'apprendimento avvenuto in maniera condivisa. La comunità non prevede una ridefinizione delle identità dei soggetti al suo interno, ma piuttosto funge da struttura atta a sostenere lo scopo della loro partecipazione. In un secondo momento, Wenger ridefinì la comunità di pratica come un gruppo di persone che condividono interessi, problemi, preoccupazioni e che intendono approfondire la loro conoscenza in uno specifico ambito interagendo tra loro (Wenger, McDermott, & Snyder, 2002). La comunità di pratica, dall'essere foriera di abilità e conoscenze date dal lavoro comune, divenne quindi uno strumento di conoscenza (Jing, 2017). Anche Dewey sostenne come le stesse discipline insegnate a scuola andrebbero messe in relazione con l'ambiente sociale di riferimento per gli alunni, ancorando ad esempio l'aritmetica utilizzata nel mondo degli adulti alle esperienze del bambino. Per fare ciò, le tradizionali aule scolastiche non sarebbero funzionali: andrebbero sotituite con laboratori, dove il bambino possa costruire, creare, ricercare attivamente (Dewey, 2008/1900, 1902). Bruner a riguardo affermò invece come il know-how non sia acquisibile semplicemente tramite la pratica, ma necessiti la coestistenza di pratica e spiegazione concettuale. In altre parole, la teoria dell'apprendimento imitativo si rivela fallace in società complesse quale quella contemporanea, in cui l'apprendimento non si può limitare alla ripetizione di comportamenti osservati. Rifiuta inoltre di considerare i bambini come delle tabulae rasae, su cui l'insegnante deve riversare il contenuto della sua mente, oltre a quello di libri di testo, cartine geografiche, ecc., come suggerivano i comportamentisti. L'apprendimento non è cumulativo, e i bambini acquisiscono lo status di pensatori riflessivi e capaci di costruire il loro modello del mondo. La didattica cessa di essere considerata come un processo unilaterale, da insegnante ad alunno (Bruner, 2011). Venne infatti proposto l'apprendimento per scoperta, una teoria dell'apprendimento costruttivista basata sull'indagine, secondo la quale gli alunni sfrutterebbero le conoscenze preesistenti e le loro esperienze per scoprire nuovi fatti e relazioni. Di conseguenza, la conoscenza costruita autonomamente dai bambini viene considerata come più solida (Jeung & Kellog, 2019). Infine Bruner, che già aveva contribuito al cognitivismo, propose per la scuola un curriculum a *spirale*, in cui ogni nuovo apprendimento si potesse ancorare ad uno precedente, in modo da facilitare nuove acquisizioni (Bruner, 1960). Venne quindi per la prima volta considerato l'impatto del curriculum sull'apprendimento, non tanto per evitare gli errori dei discenti come postulato nel comportamentismo, ma piuttosto al fine di proporre attività didattiche all'interno di una cornice chiara e nota, che sostenga lo studente durante il suo percorso di apprendimento (Jiang & Perkins, 2013).

Il modello didattico

La didattica costruttivista, distante dal modello di *training* comportamentista, vede l'apprendimento come un processo che genera conoscenza nel qui ed ora. L'attenzione si sposta quindi dal prodotto al processo compiuto da ciascun alunno, che può deviare dalle aspettative dell'insegnante e non per questo viene considerato come negativo, ma piuttosto come manifestazione del percorso di adattamento compiuto dal bambino nella costruzione della propria conoscenza. Il ruolo assunto dall'insegnante è quindi quello di garante della crescita del bambino e ciò implica proporre all'alunno strumenti e tecniche tali da interiorizzare nella zona di sviluppo attuale nuove competenze (Baccaglini Frank et al., 2018).

In particolare, la didattica proposta da Piaget prende il nome di *didattica genetica*, in quanto analizza l'apprendimento infantile fin dalla nascita, non limitandosi a uno spaccato temporale dello sviluppo. Le scoperte sulle strutture mentali misero in discussione gli assunti della Didattica della Matematica, che si rinnova proponendo un insegnamento di carattere attivo, basato sull'azione dell'alunno (Castelnuovo, 2017). Da un punto di vista prettamente didattico, gli studi di Piaget portarono a rivedere i ritmi proposti all'apprendimento, che vengono rallentati seguendo le fasi di sviluppo da lui definite (ad esempio posticipando alla scuola primaria l'introduzione del numero). Inoltre vennero proposte attività propedeutiche, al fine di stimolare l'apprendimento nelle fasi successive. Come già visto, in un primo momento questo spinse Piaget ad abbracciare l'insiemistica dei bourbakisti, appoggio revocato in un secondo momento, ma che ebbe come effetto l'abbandono da parte di gran parte degli insegnanti elementari di metodi di insegnamento basati sull'esperienza diretta e su materiali concreti, quali quelli di Pestalozzi, in virtù della didattica per insiemi (Millán Gasca, 2016).

L'apprendimento matematico di tipo costruttivista prevede inoltre la manipolazione di simboli e il coinvolgimento attivo dei discenti. Molta attenzione viene infatti prestata al significato che gli apprendimenti stessi hanno per il bambino. Il modello costruttivista, come anche quello cognitivista, prevede un'attività cognitiva interna che si svolge mentre il soggetto è in apprendimento, e allo stesso tempo determina come quest'attività si costruisca (o modelli) sulla base dell'esperienza di classe. La partecipazione diviene quindi fondamentale, e viene richiesto ai bambini di partecipare attivamente alla costruzione del loro apprendimento. Il costruttivismo suggerisce come le attività pensate per l'apprendimento abbiano le seguenti caratteristiche: coinvolgimento attivo, ricerca, soluzione di problemi e collaborazione con altri discenti. Il ruolo dell'insegnante è dunque quello di una guida e un facilitatore, che incoraggi gli studenti a prendere parte a discussioni al fine di formulare loro idee, opinioni e raggiungere conclusioni proprie e personali. L'approccio dei costruttivisti all'apprendimento è di tipo induttivo. Essi infatti focalizzano la loro attenzione su come gli alunni apprendono, più che su cosa apprendano, come invece facevano i comportamentisti (Rai, 2018).

Secondo la teoria costruttivista esistono tre vie che conducono a un apprendimento di senso, ed esse sono:

1. l'aggiunta di una conoscenza a quella già esistente;
2. una modifica della conoscenza esistente;
3. un radicale cambiamento della conoscenza esistente.

Se nei primi due casi il bambino non incontra grosse difficoltà, nel terzo esso può trovarsi dinanzi a una sfida, superabile solo nel caso in cui si renda conto che le conoscenze di cui dispone non sono sufficienti, decida quindi di ottenere la conoscenza di cui ha bisogno e l'insegnante predisponga materiali ad hoc, comprensibili al bambino, che forniscano le informazioni necessarie. Questa nuova conoscenza deve inoltre essere considerata come plausibile e utile a comprendere la situazione di partenza (Rai, 2018).

Limiti

Già negli anni '70 vennero mosse le prime critiche al modello elaborato da Piaget, in particolare da parte di Donaldson (1978), che mise in discussione le abilità raggiunte dai bambini in età prescolare. La studiosa sostenne infatti che essi siano stati sottovalutati da Piaget e che ciò sia stato causato dall'utilizzo di alcuni esperimenti. In particolare la sua critica muove dal fatto che gli esperimenti proposti fossero in larga misura molto astratti e lontani dall'esperienza infantile. Per fare un esempio, altri studiosi modificarono il "compito delle tre montagne" utilizzando dei bambolotti e delle semplici schermature. Il livello di correttezza ottenuto dai bambini risultò nettamente superiore rispetto a quello indicato da Piaget e questo sollevò dubbi anche sugli altri esperimenti (Hughes, 1975; Hughes, & Grieve, 1980). Le influenze piagetiane sui sistemi scolastici occidentali hanno tuttavia offuscato l'importanza degli apprendimenti matematici prescolari, imprescindibili per garantire buoni livelli di competenza durante tutta la vita di un individuo. Recentemente si sta assistendo a un rinnovato interesse, mosso anche dalle evidenze ottenute dalle neuroscienze (Dehaene, 2010; Mulligan, et al., 2018). Donaldson, sebbene abbia confermato come la conoscenza sia attivamente costruita dal bambino in risposta all'ambiente in cui si trova, sottolineò inoltre come qualsiasi ambiente e le sue caratteristiche siano influenzati dalla cultura dominante e dagli altri soggetti che agiscono sul e nell'ambiente. Assunsero rilevanza elementi quali la cultura e il linguaggio (Baccaglini Frank et al., 2018). A partire dagli anni '90, la Didattica della Matematica ha attinto alle teorie costruttiviste per comprendere la dimensione sociale dell'apprendimento matematico. Diverse le teorie elaborate, quali la *teoria della mediazione semiotica* di Bartolini Bussi e Mariotti (2009), che sarà ripresa nel paragrafo "Noetica e semiotica" e la *teoria della commognition* di Sfard (2009), che definisce il ruolo imprescindibile della comunicazione per l'apprendimento matematico.

2.3.4 Modello di didattica enattiva

La teoria dell'apprendimento

L'enattivismo, la più recente tra le teorie della conoscenza, prende le mosse dall'inscindibile relazione tra corpo e mente, sé e mondo esterno, considerando la conoscenza come "un processo in cui mente, corpo e mondo sono connessi" (Rossi, 2011, p. 79). La prospettiva biologica non è un unicum nella storia: lo stesso Piaget, che si formò come biologo, considerava l'intelligenza come un adattamento all'ambiente, partendo da un presupposto biologico. Tuttavia, nel 1991, Varela, Thompson e Rosch pubblicarono *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*, una sintesi di idee di fenomenologia, psicologia cognitiva, biologia evolutiva, filosofia e buddismo, con cui intendevano articolare un nuovo programma di ricerca. In particolare, il loro intento era quello di dare vita a una scienza cognitiva enattiva, capace di colmare il divario tra lo studio della mente e la riflessione sulle esperienze vissute da ogni essere umano, consuetudine che caratterizza le pratiche fenomenologiche e buddiste. Questi nuovi spunti teorici stavano ottenendo un crescente interesse da parte della comunità scientifica e la loro confluenza diede luogo all'approccio enattivo allo studio della mente, definito anche come enattivismo:

> "In a nutshell, the enactive approach consists of two points: 1. perception consists in perceptually guided action and 2. cognitive structures emerge from the recurrent sensorimotor patterns that allow action to be perceptually guided." (Varela, Thompson, & Rosch, 1991, p. 173)

A differenza del cognitivismo, secondo il quale le strutture cognitive di interesse erano gli stati interni che rappresentavano determinate proprietà dell'ambiente, l'enattivismo sottolinea invece come le strutture cognitive emergenti si autoorganizzino in seguito a interazioni tra organismo e ambiente (Ward, Silverman, & Villalobos, 2017). Secondo due tra i maggiori fautori della teoria enattiva, Maturana e Varela, la cognizione è infatti un fenomeno biologico, cioè la conoscenza è letteralmente biologica: l'enattivismo considera tutti gli esseri viventi, e non più solo le specie animali, come cognitivi. Anche una pianta che orienta le proprie foglie verso la luce solare agisce in modo da continuare a vivere, evolversi, esprimersi. La struttura di ogni organismo coincide pertanto con la sua costituzione biologica, che non è statica, ma bensì immersa in un flusso di costanti interazioni con l'ambiente; in altre parole ogni organismo è in continuo accoppiamento strutturale con esso. Eppure, la struttura degli esseri viventi è più che fisica, poiché è il frutto della loro stessa esperienza e delle loro interazioni con l'altro: nel corso della propria vita, un organismo integrerebbe le esperienze fatte all'interno della propria struttura, che a sua volta consentirebbe in modo ricorsivo la messa in atto, in condizioni specifiche, di azioni (Maturana & Varela, 1992). Il noto esempio proposto da Varela (1997) può servire da chiarificatore: si consideri l'organizzazione di un batterio unicellulare, che è separato dal mezzo di coltura in cui è immerso da una membrana semipermeabile attraverso la quale avvengono scambi con l'esterno, quali l'assorbimento di nutrienti e l'espulsione di prodotti di scarto. Questo sistema, definito come *autopoietico*, cioè capace di organizzarsi come un sistema che produca i suoi stessi componenti, comporta il fatto che sia l'insieme delle interazioni con le singole parti dell'ambiente a far emergere l'unità biologica. L'organismo viene quindi definito come *incarnato (embodied)*, in quanto è la relazione con l'ambiente a determinare lo status di entrambi. Per fare un altro esempio, il saccarosio contenuto nel mezzo di coltura può dare nutrimento solo se in relazione con il batterio, ed è quindi questa relazione a fornire significato o valore a entrambi (Thompson, 2007). L'approccio enattivo implica di conseguenza che sia l'organismo che l'ambiente dipendano da un insieme di processi dinamici auto-organizzanti. L'ambiente, composto da strutture ambientali, è significativo nella misura in cui riesce a incidere sul successo o sul fallimento dell'organismo nel mantenersi come unità autopoietica: per questa ragione secondo l'enattivismo le strutture determinate da interazioni sono a tutti gli effetti cognitivi. Il processo dinamico che definisce e sostiene sia l'organismo che l'ambiente fornisce significato: il comportamento adattivo emerge ed è sostenuto da una serie di interazioni dinamiche che a loro volta danno origine alla distinzione tra organismo e ambiente (Ward, Silverman, & Villalobos, 2017).

Questa nuova prospettiva conduce alla considerazione degli esseri viventi come presenti nell'ambiente, ma allo stesso tempo come parte di esso e ciò implica che ambiente ed organismi si influenzino a vicenda, adattandosi l'uno agli altri e viceversa, con un indelebile impatto sul corso della loro evoluzione. Esseri viventi e ambiente fungerebbero di conseguenza da mutui inneschi, posti ricorsivamente e dinamicamente in evoluzione. Ciò che consente il verificarsi di cambiamenti attivati dall'interazione dell'organismo con l'ambiente è proprio la struttura dell'essere vivente (Proulx & Simmt, 2016). All'interno della teoria dell'autopoiesi troviamo inoltre un concetto di centrale importanza: quello della *strong life-mind continuity thesis* di Froese e Ziemke (2009), ossia una teoria secondo la quale vita e mente sarebbero un continuum. La mente non è perciò più considerata come propria degli esseri umani (detti appunto senzienti in passato), ma di tutti gli organismi viventi. Thompson conferma la teoria, suggerendo che vita e mente condividano principi organizzativi di base, e che le proprietà tipicamente attribuite alla mente siano in realtà una versione più complessa di quelle a fondamento della vita stessa. Per dirlo con le parole dell'auotore, "La mente è simile alla vita e la vita è simile alla mente" (2007, p. 128). In particolare, i principi di base (forniti dalla teoria autopoietica) sono quelli richiesti per comprendere e descrivere l'organizzazione e il comportamento degli organismi viventi, oltre a comprendere i fenomeni mentali stessi (Froese & Di Paolo, 2009; Froese e Ziemke, 2009, De Jesus, 2016).

Più recentemente, il concetto di autopoiesi ha subito una revisione: secondo alcuni autorevoli esponenti dell'enattivismo, quali Di Paolo e De Jaegher, esso andrebbe riconsiderato piuttosto come un insieme dei concetti di autonomia e adattabilità, più generali e riferiti alla chiusura organizzativa di alcuni sistemi, compresi i sistemi viventi. La teoria autopoietica originale non espliciterebbe di fatto due caratterisctiche fondamentali per una concettualizzazione dei sistemi viventi, quali la capacità di resistere alle perturbazioni e di sottoporsi di conseguenza ad attività normative (Di Paolo, 2005). L'inclusione di autonomia e adattività consentirebbe invece l'estensione della teoria enattivista alla cognizione sociale. Il focus tematico dell'enattivismo non è infatti la percezione, ma la costruzione di significato all'interno di un dominio sociale (Arango, 2019). Esso può essere descritto come il significato che è generato e trasformato all'interno della relazione tra gli individui coinvolti in essa e i processi di interazione che vi hanno luogo (De Jaegher & Di Paolo, 2007, De Jaegher, 2018). Da ormai un decennio l'interesse enattivista si è esteso alla sfera sociale ed è ad oggi uno dei filoni di ricerca più produttivo, sancendo di fatto la conclusione della visione degli esseri viventi come organismi individuali (Corris & Chemero, 2020). La separazione tra percezione e azione è quindi stata messa in discussione, a favore di un approccio fortemente dinamico alla cognizione, che viene piuttosto considerata come il processo corporeo (detto anche incarnato o embodied) di un organismo. Le rappresentazioni mentali, teorizzate a partire dal cognitivismo, sono quindi messe in dubbio (Varela et al., 1991). In conclusione, l'autopoiesi è considerata come costitutiva della vita, ma insufficiente per la cognizione: in altre parole la continuità tra mente e vita non implica che esse siano anche co-estese (Thompson, 2007; Kirchhoff e Froese, 2017; Schlicht, 2018).

Il modello didattico

Secondo la teoria enattivista, il modello didattico da applicare in aula è connotato, in generale, dall'interazione (Aprile, 2012). Essa può essere rilevata nelle dinamiche contestuali all'interno della classe, osservando in particolare le dinamiche ricorsive sottese alle variazioni nei processi (Maccario, 2017). I tre ambiti maggiormente indagati dagli enattivisti possono infatti essere circoscritti a) all'incarnazione (embodiement) e alla percezione, b) alla cognizione e all'intersoggettività, e c) alla socializzazione (McGee, 2006). Nello specifico, nonostante le ricerche atte a esaminare la relazione che intercorre tra la teoria enattivista e la sua applicazione didattica siano limitate, per quanto riguarda l'insegnamento della matematica l'enattivismo considera problema e solutore in coevoluzione durante il processo di soluzione, in un sistema di perturbazioni reciproche, definito come *accoppiamento strutturale*, che comporta una modificazione oppure, in casi nefasti, una disintegrazione (Maturana & Varela, 1992; Coin, 2013). Vi sarebbe pertanto influenza reciproca sia tra gli alunni e la matematica, che tra gli alunni e l'insegnante, ma ancora tra alunni stessi: il modo in cui gli alunni interagiscono tra loro, organizzandosi e muovendosi nell'ambiente, ha contribuito all'interesse per l'interazione sociale in piccoli gruppi collaborativi. L'interazione dinamica che intercorre tra l'organismo autopoietico e il suo ambiente, definita accoppiamento strutturale, si verifica quando l'ambiente e gli esseri viventi (in questo caso insegnante e alunni) sono in interazione. L'interazione non si limita tuttavia a costituire la costruzione socializzata della conoscenza, come avveniva per i costruttivisti, ma si estende fino ad essere costituita da co-emergenze (Damiano, 2012; Rossi, Prenna, Giannandrea e Magnoler, 2013). Con co-emergenza qui si intendono i processi che conducono a una coesistenza nell'interazione sociale, a un'esigenza che diviene comune alle parti nella reciprocità di perturbazioni. La socializzazione degli intenti diviene quindi condizione ineludibile dell'organizzazione interattiva (Dongwi & Schäfer, 2019). L'accoppiamento strutturale ben descrive la relazione d'aula, in cui i sistemi autopoietici dello studente e dell'insegnante (e dei singoli studenti tra loro) influenzano in maniera massiccia l'apprendimento, ancor più dell'azione didattica del docente nei confronti dei bambini (Rossi, Prenna, Giannandrea e Magnoler, 2013; Maccario, 2017).

Limiti

Pur essendo una teoria relativamente giovane, uno dei limiti riscontrati nell'enattivismo riguarda il solipsismo. Nello specifico, la focalizzazione sul soggetto, pur nell'interazione con il contesto e con gli altri organismi, comporterebbe un rovesciamento dell'apprendimento sull'insegnamento, definita come *sindrome dello specchio*, soprattutto nelle ricerche che coinvolgono il modello didattico di sua derivazione. La centratura sull'alunno comporterebbe infatti un'attenzione quasi totalitaria sull'apprendimento, che si identificherebbe, erroneamente, con l'insegnamento (Damiano, 2017).

3 | Didattica della matematica alla scuola primaria:

Nel capitolo introduttivo sono stati illustrati i fondamenti dell'insegnamento della matematica e le principali teorie dell'apprendimento. Nel presente capitolo sarà quindi dato spazio a un focus sui processi di insegnamento-apprendimento nel tentativo di fornire un quadro dello stato dell'arte della Didattica della Matematica nelle scuole primarie italiane. La presente ricerca intende infatti indagare come le tecniche didattiche elaborate, spesso implicitamente, dagli insegnanti interagiscano con le teorie dell'apprendimento da cui derivano. Di conseguenza, saranno approfonditi sia i principali costrutti della Didattica della Matematica, sia i fattori di influenza sulla relazione educativa a casa e a scuola, innestandosi nella cornice teorica delineata nel primo paragrafo.

3.1 Insegnamenti matematici

In questo primo paragrafo si intende fornire una cornice teorica che espliciti gli assunti a sostegno della sperimentazione. In dettaglio il focus sarà posto sul versante dell'insegnamento, lasciando quindi spazio alla descrizione delle prassi, dei modelli e delle teorie che sottendono e caratterizzano la pratica didattica, prestando al contempo attenzione alle sfide educative identificate dalla letteratura di riferimento.

3.1.1 Quale didattica oggi

Didattica per competenze

Tre sono le discipline foriere di risultati che hanno permesso la definizione della Didattica della Matematica: la pedagogia, la psicologia, la matematica. Esse, in estrema sintesi, hanno condotto a identificare l'apprendimento come costruzione di saperi significativi, tenendo conto in ogni momento dell'interesse e delle strutture mentali del bambino, considerando la matematica non come un ente astratto a sé stante, ma piuttosto in virtù della sua operatività (Castelnuovo, 2017). Il dibattito che ha contrapposto negli ultimi anni i sostenitori di una Didattica della Matematica per tutti o per ciascuno è confluito nel convincimento, condiviso da parte della comunità scientifica, che sia prioritario non tanto promuovere una determinata quantità di insegnamenti, ma piuttosto educare alla capacità di creare nessi e legami significativi tra concetti apparentemente distanti, a leggere situazioni reali, o immaginarie, e a coglierne le implicazioni (Ambrisi, 2015). La Didattica della Matematica deve infatti oggi tenere conto della rapidità d'obsolescenza dei saperi. La formazione matematica proposta a scuola non può dunque più limitarsi all'acquisizione di conoscenze, illudendosi che esse saranno valide per decenni, ma deve piuttosto tendere allo sviluppo di competenze. Deve, in altre parole, garantire un apprendimento adattabile e trasferibile a contesti altri e, per farlo, deve necessariamente promuovere competenze riflessive, ovvero incentivare una postura di apertura nei confronti dell'apprendimento continuo e sostenere la metacompetenza, o competenza dell'imparare ad imparare (Sacchi, 2007). L'autonomia didattica, per potersi compiere, necessita pertanto non solo di un'elevata professionalità insegnante, ma anche di contesti di vita costituiti da ambienti sociali e culturali che sostengano l'importanza degli insegnamenti matematici (Ambrisi, 2015). In Didattica della Matematica sta quindi avvenendo oggi ciò che è avvenuto in passato per le discipline mediche: non è più sufficiente l'intuizione, che deve invece essere sostenuta e orientata da analisi, professionalità e scientificità. Nonostante quest'analogia, la didattica differisce dalla medicina in quanto contestuale: per ottenere risultati soddisfacenti non è sufficiente affidarsi ciecamente ai risultati scientifici senza tener conto delle situazioni d'aula e ciò ha inevitabilmente aumentato la complessità della ricerca in didattica (Castelnuovo, 2017).

La nascita della didattica per competenze ha dunque permesso di coniugare le necessità espresse dalla Didattica della Matematica con quelle emerse dalla pratica d'aula da parte degli insegnanti di matematica. In particolare, nella loro declinazione socio-costruttivista, le competenze richiamano la progettazione di un ambiente di apprendimento caratterizzato dalla complessità, in cui sia possibile affrontare situazioni-problema significative e sfidanti e in cui venga agevolata una costruzione della conoscenza caratterizzata dall'essere attiva, collaborativa e riflessiva, sposando le attese di didatti e docenti (Consoli, Szpunar, & Sposetti, 2019). La strategia di Lisbona (2000) ha infatti definito a livello europeo un approccio all'educazione di tipo olistico, definendo la duplice mission della scuola come democratica da un lato e culturale dall'altro. La mission democratica prevede che ciascuno (*non uno di meno*) disponga delle risorse necessarie a garantire il diritto allo studio, di qui la necessità di una scuola inclusiva e fautrice di integrazione sociale, al fine di ridurre l'abbandono scolastico e promuovere l'ascensore sociale. La mission culturale riguarda invece la promozione di una conoscenza finalizzata allo sviluppo tanto di un pensiero plurale (*teste ben fatte e non ben piene*), quanto di un sistema valoriale fondato sulla cooperazione (Frabboni, 2009). Dopo il vertice di Lisbona, la formazione viene quindi chiamata a riflettere sulle competenze che gli studenti acquisiscono durante il loro percorso scolastico, in un'inedita ottica di lifelong learning (Lupoli, 2012). In particolare, le competenze chiave identificate dai Paesi membri nella raccomandazione del Parlamento e del Consiglio europeo (2006) sono: competenza alfabetica funzionale, competenza multilinguistica, competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria, competenza digitale, competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare, competenza in materia di cittadinanza, competenza imprenditoriale e competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali. Le competenze chiave sono quindi quelle imprescindibili per essere cittadini attivi nella società europea. Tuttavia, il rinnovamento innescato dall'Unione conduce a una riflessione sul significato e sul senso formativo delle competenze. Pellerey (2004, p. 12) dà una definizione di competenza quale

> "La capacità di far fronte a un compito o un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo."

La competenza è quindi situata, mette in relazione il mondo esterno con l'individuo consentendogli di superare situazioni di iniziale difficoltà. Cambi (2004), la descrive piuttosto come l'insieme delle conoscenze e delle abilità spendibile in vari contesti. Essendo la competenza trasferibile, non si limita al possesso astratto di saperi, ma viene vagliata dall'esperienza, in cui la conoscenza trova applicazione. Sono inoltre distinguibili due tipologie di competenze: quelle mobili (adattabili, rinnovabili) e quelle capillari (strettamente settoriali). Il compito della scuola è quello di garantirle entrambe, al fine di attrezzare gli alunni per la loro vita presente e futura. Trinchero (2018), si rifà invece sia alle competenze chiave definite a livello europeo, sia ai criteri regolativi stabiliti dal Ministero italiano della Pubblica Istruzione. Nel 2005, rifacendosi ai documenti europei, il Ministero definisce infatti nella Circolare Ministeriale n. 84 del 10 novembre 2005 la competenza come:

> "l'agire personale di ciascuno, basato sulle conoscenze e abilità acquisite, adeguato, in un determinato contesto, in modo soddisfacente e socialmente riconosciuto, a rispondere a un bisogno, a risolvere un problema, a eseguire un compito, a realizzare un progetto. Non è mai un agire semplice, atomizzato, astratto, ma è sempre un agire complesso che coinvolge tutta la persona e che connette in maniera unitaria e inseparabile i saperi (conoscenze) e i saper fare (abilità), i comportamenti individuali e relazionali, gli atteggiamenti emotivi, le scelte valoriali, le motivazioni e i fini. Per questo, nasce da una continua interazione tra persona, ambiente società, e tra significati personali e sociali, impliciti ed espliciti."

Seguiranno le Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (D.M. n. 254 del 16 novembre 2012), che sottendono alle declinazioni disciplinari la stessa accezione di competenza. Insita nella definizione vi è un'indicazione diretta alla didattica: si auspica un approccio non più didascalico, ma atto a rispondere a un bisogno, a risolvere un problema, a eseguire un compito, a realizzare un progetto. Tuttavia, a queste indicazioni non fa seguito una ridefinizione dell'organizzazione scolastica, didattica e degli apprendimenti da parte del ministero stesso (Guasti, 2012). In una società complessa quale quella in cui siamo immersi, considerare le singole competenze come saperi disgiunti è infatti inadeguato rispetto alle sfide poste alla scuola. Occorre dunque ripensare la formazione non in funzione di un utilizzo tecnico, come si è visto pratica comune nei secoli e nei decenni scorsi per l'insegnamento della matematica, ma piuttosto come forza propulsiva per affrontare le sfide del nostro tempo (Morin, 2000).

La didattica per competenze è infine una didattica inclusiva, che pone il successo formativo come obiettivo per ciascuno studente, ma soprattutto per quanti presentano *bisogni educativi speciali* (BES) o *disturbi specifici dell'apprendimento* (DSA). Eppure, se una didattica per tutti e per ciascuno è a fondamento della scuola contemporanea, gli insegnanti sono chiamati a confrontarsi con la complessità data dal dilemma del pluralismo educativo, ossia la necessità di coniugare gli eterogenei bisogni educativi all'interno della stessa classe, garantendo allo stesso tempo il successo formativo di ogni alunno. L'elevato grado di complessità che ne scaturisce implica l'utilizzo di modalità didattiche efficaci, flessibili, frutto di una professionalità competente e riflessiva (Damiani, Merlo, Sargenti, Testa, 2016). Tra i bisogni espressi dagli alunni troviamo quello all'inclusione culturale, soprattutto per quanti arrivano nel nostro Paese o vi sono nati, ma sono accomunati dall'aver vissuto i primi anni di vita in contesti, anche linguistici, estranei a quello italiano. In questo senso i simboli matematici divengono linguaggio comune per tutti: sebbene possano esistere enormi differenze culturali tra il contesto di origine e quello italiano, questi simboli, diffusi in tutto il globo, accomunano gli insegnamenti matematici di base. Le pratiche didattiche legate agli insegnamenti di base della matematica sembrano infatti assomigliarsi a livello mondiale, pur con una differenziazione in termini di ritmi e richieste, dal momento che sia le risorse disponibili che la stessa impostazione delle istituzioni scolastiche presentano differenze significative, con conseguente influenza sulla prassi d'aula (Asami-Johansson, Attorps & Winsløw, 2018; Bartolini Bussi, 2009; Blum, Artigue, Mariotti, Sträßer, & den Heuvel-Panhuizen, 2019). Le somiglianze riscontrate paiono essere dovute al carattere di universalità proprio della matematica, oltre al fatto che gli insegnamenti di base, il cosiddetto "far di conto", nasce da una radice europea, che ha esportato la propria tradizione in tutto il mondo. Anche confrontando i libri di testo diffusi nei diversi continenti, le analogie superano di gran lunga le differenze, dotando le lezioni di matematica di una potenzialità maggiore in termini inclusivi, soprattutto nelle prime fasi di accoglienza, rispetto ad altre discipline (Millán Gasca, 2016).

Laboratorio matematico

Fin dal secolo scorso, il laboratorio ha caratterizzato l'apprendimento di tutte quelle discipline considerate come scientifiche (Polo, 2017). Il laboratorio matematico non va tuttavia in questo contesto identificato con uno spazio fisico, ma piuttosto come l'insieme di tutte quelle attività didattiche mirate alla costruzione di competenze, incentivando apprendimenti matematici densi di significato per gli alunni. Esso è comparabile all'esperienza rinascimentale delle botteghe, in cui l'apprendista imparava un mestiere facendo e stando in relazione con un esperto. Se quindi da un lato sono assolutamente rilevanti gli strumenti adottati, non è possibile prescindere dall'interazione tra gli apprendenti e tra gli apprendenti e il docente (Baccaglini Frank et al. 2018). L'attività laboratoriale è infatti caratterizzata dall'uso delle *euristiche*, definite come la ricerca creativa e imprevedibile di una soluzione a un problema matematico, e si pongono in antitesi con la prassi didattica di fornire a priori algoritmi da seguire, spesso resa necessaria dal *contratto didattico* (Brousseau, 2008).

L'idea del laboratorio matematico non deve tuttavia far pensare a una matematica facilmente spendibile nella vita quotidiana. Occorre piuttosto prestare attenzione a non dimenticare come nel pensiero infantile non vi sia un posto privilegiato per quanto è direttamente utilizzabile nella pratica di ogni giorno. Al contrario, i bambini sono attratti e affascinati da ciò che essi ritengono sia prioritario, più importante, e mostrano maggiore entusiasmo nell'apprendere ciò che è per loro significativo, in quanto collocabile in una cornice di senso all'interno del loro vissuto e del loro mondo (Millán Gasca, 2016). La didattica laboratoriale rappresenta infatti un'occasione per promuovere negli alunni la competenza a "imparare a imparare", fornendo gli strumenti necessari affinché essi possano attivamente costruire abilità e conoscenze. In particolare questo tipo di didattica consente ai bambini:

a) di conoscere la realtà culturale in cui si trovano immersi;

b) assumere consapevolezza delle proprie potenzialità, concretizzando progetti personali e dotando di senso e significato condiviso la propria azione in contesto di apprendimento;

c) di assumere *decisioni situate* in contesti specifici.

Ognuno di questi fattori concorre allo sviluppo di capacità rilevanti per il sapere matematico, quale quella di operare delle scelte motivate e consapevoli, oltre che funzionali al raggiungimento dell'obiettivo posto (Sacchi, 2007).

L'apprendimento laboratoriale avviene quindi per esperienza diretta e pone l'alunno in una dimensione progettuale e non procedurale, che lo costringe a mobilitare le proprie conoscenze al fine di risolvere una situazione problematica. Il laboratorio trova fondamento teorico nella pedagogia attiva, ipotizzato già da Pestalozzi e Montessori, ma si sviluppa nell'apprendimento socio-costruttivista, secondo cui la relazione costituisce il contesto in cui l'apprendimento avviene. La collaborazione all'interno del gruppo e la socializzazione della conoscenza acquisita tra gruppi è particolarmente rilevante in matematica, per evitare fenomeni quali l'utilizzo del matematichese da parte degli alunni, e promuovere gli strumenti necessari alla dimostrazione scientifica (D'Amore & Sandri, 1996; Casson, 2016). Il laboratorio diviene quindi palestra non solo da un punto di vista cognitivo, ma anche sociale ed emozionale per l'apprendimento della matematica (Polo, 2017). Quest'ultima componente è di prioritaria importanza proprio per questa disciplina, che spesso è legata a vissuti negativi, quali l'ansia in matematica: proporne una didattica che permetta di esperire situazioni di successo formativo unito alla piacevolezza per l'apprendimento può scardinare il circolo vizioso generato da aspettative e attribuzioni negative.

Contratto didattico

La didattica della matematica, pur essendo accomunata alle altre didattiche per mirare alla competenza, presenta anche peculiarità proprie, quali ad esempio il contratto didattico e le situazioni didattiche. Nella relazione educativa che si instaura in aula, si costruisce di fatto con il tempo un contratto che regolamenta le aspettative di insegnanti e alunni, il fine del processo di insegnamento-apprendimento e le risorse necessarie e disponibili per lo svolgimento di questo processo (Nigris, Teruggi, & Zuccoli, 2016). Come in qualsiasi altra interazione sociale, esistono invero diritti e doveri che sono appunto regolamentati dal contratto sociale, un patto stipulato spesso tacitamente tra le parti. Il *contratto didattico* (Brousseau, 1986), un contratto sociale accordato all'interno della relazione d'aula, assume specificità peculiari in quanto è costituito dall'insieme di aspettative, convinzioni e attribuzioni non solo riferite alla matematica, ma anche al suo apprendimento e ai soggetti coinvolti. Brousseau lo definì come l'insieme di quei comportamenti agiti dall'insegnante, che sono attesi dall'allievo e, complementarmente, di quelli compiuti dall'allievo, che sono attesi dall'insegnante. In altre parole esso sarebbe definito prioritariamente dall'insegnante, che fissa nel suo rapporto con gli alunni una serie di regole non scritte e condizioni implicite che vengono tacitamente accettate dai bambini. In seconda battuta anche gli alunni stabilirebbero un regolamento implicito cui attenersi. Pur non dichiarate apertamente, queste regole risultano sempre note a tutti gli attori coinvolti nella relazione educativa (Cavicchi, 2016). L'influenza del contratto didattico sull'apprendimento matematico è riscontrabile attraverso la proposizione di specifiche attività volte a conoscere quali leggi regolamentino il processo di insegnamento-apprendimento. Uno degli strumenti più utilizzati in letteratura è il problema del capitano, un problema descritto da Flaubert all'incirca con queste parole: una nave si trova in mare, è partita da Boston carica di indaco, ha un carico di 200 barili, fa vela verso Le Havre, l'albero maestro è rotto, c'è del muschio sul castello di prua, i passeggeri sono in numero di dodici, il vento soffia in direzione NNE, l'orologio segna le tre e un quarto del pomeriggio, si è nel mese di maggio. Si richiede l'età del capitano (Baccaglini Frank, 2018). In Didattica della Matematica, soprattutto nei primi anni di scolarizzazione, si utilizza la sua versione semplificata: una nave trasporta 26 pecore e 10 capre: quanti anni ha il capitano? Tale quesito è stato sottoposto, in varie varianti, fin dagli anni '80, a migliaia di bambini in tutto il mondo. I risultati ottenuti hanno mostrato come nella stragrande maggioranza dei casi gli alunni rispondessero dopo aver combinato aritmeticamente i numeri presenti nel testo del problema. Fornivano in altre parole una risposta a una domanda impossibile seguendo la procedura più aderente al contratto didattico, piuttosto che scegliere la via più logica (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Tali risultati hanno confermato come il contratto didattico influenzi direttamente le scelte degli studenti, i quali mettono in atto procedure stipulate all'interno del contratto stesso a prescindere dagli oggetti matematici con cui entrano in relazione. La commistione tra questo fenomeno e quello del paradosso del linguaggio specifico porta inoltre a un'identificazione delle richieste insite nelle attività didattiche, come legate più alla metodologia adottata dall'insegnante che alle scelte didattiche messe in atto. In dettaglio, il paradosso consiste nel fatto che l'utilizzo di un linguaggio specifico, sebbene costituisca parte integrante della matematica, fungerebbe da ostacolo epistemologico soprattutto per i bambini. Di conseguenza, i docenti tendono a meticciare il linguaggio comune a quello propriamente matematico, dando luogo al cosiddetto *matematichese*, ossia un vero e proprio linguaggio con una sua sintassi e un suo lessico, che risulta tuttavia avulso dal linguaggio matematico (D'Amore & Sandri, 1996). L'esito della commistione tra l'utilizzo del matematichese e lo stabilirsi di un contratto didattico disfunzionale all'apprendimento è dato dall'*effetto Topaze*, per cui la risposta richiesta all'allievo è suggerita già nella domanda. Un esempio è la proposta di problemi che contengano nella loro domanda l'espressione "in tutto", a cui deve necessariamente seguire almeno un'addizione. Viene quindi meno la comprensione, l'utilizzo della logica e un'autentica relazione tra i bambini e gli oggetti matematici (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009). Ne consegue che, per poter apprendere, l'allievo deve necessariamente rompere il contratto stipulato con l'insegnante: seppur valido in molte situazioni, in alcune influenza negativamente l'apprendimento e deve perciò essere abbandonato. Per evitare un mancato apprendimento o l'innescarsi di una situazione conflittuale, il docente dovrebbe farsi promotore di una didattica flessibile che, pur non potendo sottrarsi al contratto didattico, sia capace di proporlo in una forma provvisoria e superabile (Baccaglini Frank, et al., 2018).

Teoria delle situazioni didattiche

Come visto nel capitolo precedente, teorie e assunti matematici sono spesso frutto del lavoro di molteplici matematici nel corso di decine se non centinaia di anni. Ripercorrere l'iter storico di ogni concetto introdotto durante le lezioni di matematica sarebbe impossibile, tuttavia il totale annullamento della storia che soggiace agli oggetti matematici porta alla presentazione del sapere come istituzionalizzato o, nel peggiore dei casi, semplificato. L'azione didattica dovrebbe pertanto comprendere quattro tipologie di situazione (Brousseau, 1997):

1. situazione di azione, in cui l'insegnante programma l'attività didattica in modo da poter lasciar campo libero agli alunni durante lo svolgimento. Questa fase preparatoria è cruciale in quanto il docente deve applicare competenze didattiche tali da muovere la motivazione degli studenti, permettendo loro di lavorare in autonomia e con creatività, raggiungendo un obiettivo comune.

2. situazione di formulazione, segue la situazione precedente e prevede lo scambio e la condivisione all'interno della classe delle esperienze e delle osservazioni fatte. In questa situazione viene promosso un linguaggio

scientifico, rigoroso e condiviso, in quanto le conoscenze apprese sono sì frutto di un'esperienza individuale, ma assumono valenza sociale se condivise con altri.

3. situazione di validazione, durante la quale il docente assume un ruolo assimilabile a quello di chi presiede un dibattito scientifico. Mentre gli alunni condividono e verificano i risultati ottenuti, egli interviene solo per indirizzare i ragionamenti e come un loro pari. Il contesto d'aula deve ricordare un dibattito accademico, per questo gli apprendimenti che vanno costruendosi devono riflettere le caratteristiche di una conoscenza matematica in divenire e non istituzionalizzata e perfetta.

4. situazione di istituzionalizzazione, con cui si conclude l'azione didattica. Il docente, in qualità di rappresentante del curriculum scolastico, correda le conoscenze sin qui costruite di terminologia, teoremi e definizioni ufficialmente accettate e condivise. La conoscenza viene quindi suffragata dall'istituzione.

Nella prassi scolastica, quest'ultima situazione tende a prevalere sulle altre, arrivando ad influenzare la proposta delle prime tre situazioni che vengono quindi piegate a una condizione di istituzionalizzazione, laddove proposte. L'insegnante cioè propone sé stesso, o in suo luogo un libro di testo o una scheda, come fonte di verità matematica anche durante lo svolgimento ad esempio di un problema, privando gli studenti delle fasi creative e di confronto della fase preparatoria (Baccaglini Frank, et al., 2018).

Secondo la *teoria delle situazioni didattiche* di Brousseau (2008) esistono pertanto tre distinti tipologie di situazione in cui alunni e insegnanti si vengono a trovare. Nel primo caso, quello della *situazione didattica*, il docente chiarisce esplicitamente il fine dell'intervento educativo, gli obiettivi posti e le attività che permetteranno di raggiungerli, in altre parole stipula un contratto didattico che prevede una risposta da parte dei bambini coerente alle sue aspettative. Nel secondo caso, quello della *situazione non-didattica*, non vi è una strutturazione così rigida, l'oggetto matematico che si intende presentare agli alunni non è esplicitato e non sono chiari quali obiettivi l'insegnante intenda perseguire attraverso le attività proposte. In questo tipo di situazione l'apprendimento può avvenire comunque, ma non è orientato né preparato dall'insegnante. L'ambiente stesso non è strutturato. In ultima istanza, le *situazioni a-didattiche* prevedono un confronto diretto tra gli alunni e una sfida matematica. L'apprendimento è quindi insito nell'adattamento, nella soluzione, nella risposta che il bambino genera da una situazione di instabilità. L'alunno è consapevole che questo passaggio sia necessario per conseguire un apprendimento e ne coglie quindi il senso, pur non assumendo quel corredo di aspettative e regole implicite previste dal contratto didattico. Il ruolo del docente è quello di facilitatore: predispone una situazione alla sua portata e atta a promuovere nuovi apprendimenti, in linea con gli obiettivi definiti da egli stesso, ma è l'alunno a costruire personalmente un rapporto con l'oggetto matematico, che non è mediato dal contratto didattico (Nigris, Teruggi, & Zuccoli, 2016). Nella situazione a-didattica avviene una *devoluzione*, ossia un fenomeno attraverso il quale l'insegnante cede la propria responsabilità all'alunno. Esso sottende un paradosso: il docente programma l'attività al fine di promuovere l'apprendimento di un oggetto matematico, apprendimento che viene tuttavia demandato unicamente all'alunno (Baccaglini Frank, et al., 2018).

L'insegnante non può in conclusione sottrarsi in alcun modo ai conflitti che il contratto didattico genera, a cui è possibile rispondere solo tramite l'epistemologia del docente stesso, che deve tuttavia essere condivisa sia dagli alunni che dai loro genitori per poter essere efficace. La conoscenza va quindi riorganizzata al fine di trovare un quadro di senso all'interno di questa relazione triadica, e questo processo prende il nome di *trasposizione didattica*. Essa deve contenere le scelte in termini di contenuti, la loro successione temporale e il modo in cui il docente intende proporle alla classe, tutti fattori che vengono inevitabilmente influenzati dal tipo di contratto didattico che è stato instaurato (Brousseau, 2008).

3.1.2 Semiotica e noetica

Il bambino, per apprendere, ha bisogno di spazi in cui poter manipolare, costruire, creare, e di conseguenza necessita di materiali e di luoghi adatti. Fornire all'alunno della scuola dell'infanzia e primaria ciò di cui ha bisogno significa renderlo il centro di gravità, il sole attorno al quale l'azione educativa compie la sua orbita (Dewey, 2008). Già Montessori, come altri pedagogisti e matematici riportati nel capitolo precedente, aveva avuto l'intuizione per cui l'apprendimento dovesse partire dai sensi (Tornar, 2007). In particolare, la competenza matematica si costruisce in primo luogo sul rapporto tra conoscenza (*noesis*) e rappresentazione (*semiosis*). Dal momento che gli oggetti matematici sono astratti, non è infatti possibile ottenere una conoscenza matematica senza una rappresentazione degli oggetti stessi. Duval espresse questa relazione affermando come non vi fosse noesis senza semiosis (1995). La didattica della matematica, essendo quindi così ricca di oggetti inarrivabili tramite i sensi, necessita dunque secondo Montessori di una mediazione sensoriale attuabile tramite la manipolazione e l'esperienza diretta, prima di poter avviare qualsiasi processo di astrazione, che si sviluppa attraverso la generalizzazione delle conoscenze acquisite tramite il contatto e l'esplorazione nell'ambiente. Il materiale fornito dall'insegnante e la sua disposizione nello spazio d'aula condizionano così gli apprendimenti matematici, in quanto la cognizione infantile si manifesta sempre in primo luogo con l'attività motoria, in una relazione inscindibile tra la mano e la mente in cui l'una sostiene e influenza l'altra e viceversa (Tornar, 2007).

Le rappresentazioni semiotiche assumono particolare rilevanza soprattutto in didattica della matematica, in quanto esse mediano i concetti matematici agli alunni. In altre parole gli insegnamenti impartiti non riguardano direttamente la noesis, ma la semiosis. A riguardo, la teoria della *commognition* considera l'apprendimento della matematica come un avvicinamento ai linguaggi matematici, in quanto costruttori di significati. Gli oggetti matematici possono quindi essere intuiti, ma per poter essere socializzati occorre una rappresentazione e una comunicazione linguistica

(Sfard, 2009). Il necessario utilizzo di rappresentazioni in luogo degli oggetti matematici spiegherebbe quindi perché, se confrontata alle altre discipline, la matematica possa risultare più difficile. Esistono infatti molteplici rappresentazioni dello stesso oggetto matematico, e allo stesso tempo esistono diversi mezzi o sistemi in grado di produrre una rappresentazione dello stesso oggetto e la classificazione di queste rappresentazioni non avviene secondo la sensibilità degli individui, ma in base ai sistemi che producono la rappresentazione. Questa doppia giustapposizione fa emergere due problemi: in molteplici occasioni, come anticipato, l'oggetto matematico è inarrivabile e sono disponibili solo delle sue rappresentazioni. Non è quindi possibile per lo studente avere esperienza diretta dell'oggetto, ma deve inevitabilmente utilizzare una sua semiosis. Inoltre, la molteplicità di rappresentazioni di uno stesso oggetto può confondere soprattutto il soggetto in apprendimento, che non riesce a coglierne le similitudini (Duval, 2006). Per fare un esempio, un oggetto matematico piuttosto banale come il numero 4 può essere rappresentato in svariati modi, tra cui "QUATTRO", "IV", "oooo". Tutte queste rappresentazioni risultano opache, in quanto a un bambino di sei anni non è assolutamente chiaro che ciò che esse hanno in comune è una specifica quantità. Le rappresentazioni possono infatti essere iconiche, restituendo una caratteristica dell'oggetto, oppure simboliche, ossia essere dipendenti da un sistema di regole che prescinde dall'oggetto rappresentato (Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 200). Questa caratteristica, propria di tutti gli oggetti matematici, li rende di fatto inarrivabili attraverso la semplice intuizione o sensibilità da parte di molti bambini a quella età, che non hanno ancora costruito sufficienti conoscenze pregresse a cui potersi ancorare per poter generare, induttivamente, la categoria sovraordinata (Duval, 2006).

Utilizzare quindi strumenti, siano essi di manipolazione (in questo caso definiti *artefatti*) oppure digitali, che mediano le caratteristiche degli oggetti matematici, migliora la comprensione matematica da parte degli alunni (Monaghan, Trouche, & Borwein, 2016). È a questo punto importante specificare come il materiale utilizzato nel processo di insegnamento-apprendimento matematico non sia necessariamente caratterizzato da elevata tecnologia o valore: ciò che è rilevante è che esso sia costituito da elementi mobili al fine di poter costruire la matematica. A titolo esemplificativo, si cita uno dei materiali dal maggior potenziale: lo stecchino. Con esso è possibile non solo lavorare sulla costruzione di figure geometriche, sul concetto di perimetro, area, altezza e base, ma anche sulla soluzione di problemi e operazioni per cui la costruzione e il conteggio sostituiscono la non verbalizzazione imposta dal materiale stesso (Castelnuovo, 2017). Gli artefatti, dal momento che favoriscono la manipolazione, invitano l'alunno ad agire direttamente su di essi, ad imparare costruendo significati attraverso il suo corpo (Faggiano, Montone, & Mariotti, 2018). Sono inoltre state di recente ottenute evidenze sia da ricerche svolte in ambito della Didattica della Matematica, sia in quello delle neuroscienze, riguardo la cruciale importanza di esperienze cinestetico-tattili per la costruzione di conoscenze matematiche, a conferma delle intuizioni avanzate da matematici e pedagogisti (Baccaglini-Frank & Bartolini Bussi, 2015).

Secondo la *Teoria della Mediazione Semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; 2009), gli artefatti sono ancora fattori a sostegno delle funzioni cognitive, dotati di una duplice caratteristica: quella di essere pragmatici o esperienziali (orientati all'esterno, modificando cioè l'ambiente circostante), e quella di essere riflessivi (orientati all'interno, favorendo lo sviluppo personale). Essi si distinguono dagli strumenti in quanto sono stati ideati e creati per rappresentare un oggetto matematico e non riflettono quindi, al contrario degli strumenti, degli schemi d'uso. Non sono quindi legati a chi li ha progettati né a uno specifico contesto. Va da sé che l'applicazione di schemi d'uso da parte degli studenti potrebbe essere di impedimento alla costruzione della conoscenza in quanto il raggiungimento dell'obiettivo d'apprendimento viene precluso dall'esperienza fenomenologica del bambino, ed è pertanto necessario che il docente presti particolare attenzione a questo ostacolo epistemologico. L'utilizzo di artefatti agevola l'apprendimento in quanto si inserisce nella zona di sviluppo prossimale, accorciando la distanza tra lo sviluppo momentaneo del bambino e il suo sviluppo potenziale, determinata dalla capacità di risolvere situazioni sfidanti grazie al rinforzo fornito dalla concretezza degli oggetti presentati. Segni e artefatti sono accomunati dal fatto che ogni relazione, secondo la teoria vygotskijana, è caratterizzata da processi semiotici: nella relazione sociale i segni distintivi sono rappresentati dal linguaggio, mentre nei processi di interiorizzazione i segni "hanno funzione di strumento [...] analogamente al ruolo di un utensile nel lavoro". (Vygotskij, 1978, p.52). Il ruolo assunto dagli artefatti è quindi quello di *mediazione semiotica* degli oggetti astratti, per cui da un lato il nesso tra l'artefatto e il compito può essere rappresentato da segni, spesso situati, ossia relativi al processo risolutivo di una situazione problematica e quindi con significato strettamente legato alla situazione contingente. Dall'altro il legame tra conoscenza e artefatti può essere espresso da segni, culturalmente connotati, che cristallizzano il senso delle operazioni svolte tramite l'artefatto. Di conseguenza, "la costruzione di questa relazione diventa un cruciale scopo educativo che può essere realizzato promuovendo l'evoluzione dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e i compiti in segni che esprimono la relazione tra artefatto e sapere" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 284). Le relazioni semiotiche sono quindi organizzate in un sistema complesso che coinvolge gli artefatti, il compito, la conoscenza matematica posta come obiettivo dell'attività didattica e i processi di insegnamento-apprendimento (come rappresentato in figura 3.1).

Il ruolo assunto dall'insegnante all'interno della relazione è dunque quello di mediatore culturale, favorendo la generazione di nuovi significati a partire dal reale utilizzo di un oggetto, appunto l'artefatto, che prende quindi il nome di strumento di mediazione semiotica quando utilizzato dal docente con la chiara intenzione di veicolare dei contenuti (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Gli artefatti utilizzati per le lezioni di matematica si distinguono infine in materiale individuale e in materiale collettivo. Il primo, destinato ad ogni alunno, mira ad esercitare le facoltà sintetiche, mentre il secondo, di classe, è utilizzato dall'insegnante, e rimanda alle facoltà analitiche. In conclusione, l'ideazione di artefatti non ha coinvolto storicamente solo pedagogisti, ma

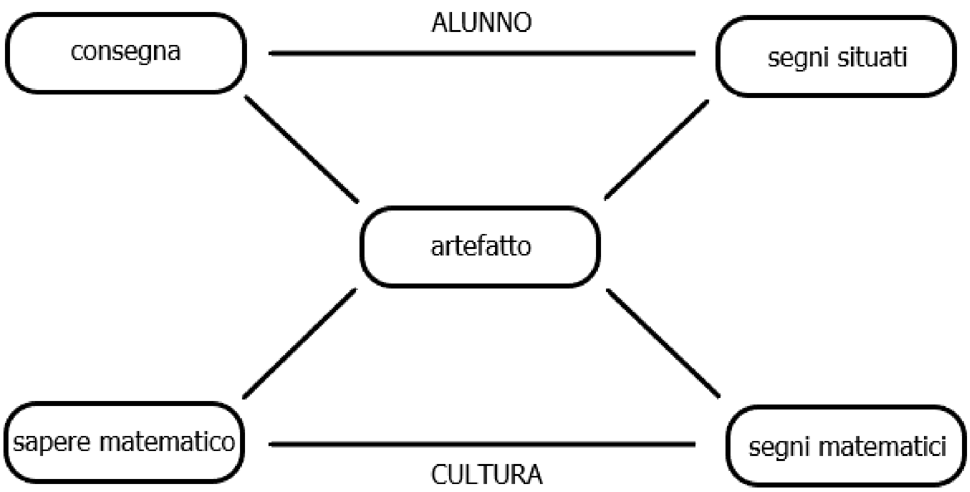


Figura 3.1: Modello della relazione tra i due sistemi di segni: promuovendo la relazione, mediata da artefatti, tra segni situati e compiti matematici, si rinforza il nesso tra i segni propri della matematica e la conoscenza da parte dei bambini (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

anche matematici, quali Gattegno, che ideò il famoso geopiano, e il loro numero tende ormai all'infinito, per cui risulta difficile farne un elenco esaustivo (Castelnuovo, 2017). Come sarà illustrato nel capitolo successivo, esiste un filone di ricerca in Didattica della Matematica che studia l'espressione didattica degli artefatti, detti anche *manipulatives*, in cui la presente ricerca si inserisce.

3.1.3 Le sfide della didattica

Problem solving:

Un problema, sia esso realmente vissuto o scientificamente posto, viene definito come un fenomeno per cui è necessario assumere delle decisioni circa la strategia da adottare per risolverlo (Özsoy & Ataman, 2009). L'interesse per il pensiero produttivo, ossia quell'abilità cognitiva basata sulla creatività piuttosto che sulla riproduzione di una procedura, venne sollevato già dalla Gestalt, che indagò alcuni processi di problem solving: il focus di questi studiosi era posto sulla distinzione tra processi produttivi e riproduttivi, sulle rispettive caratteristiche, sulle condizioni favorevoli per l'uno o per l'altro e sull'insight, ossia il preciso momento in cui la soluzione del problema appare improvvisamente chiara (Baccaglini Frank et al., 2018). Wertheimer, con diversi studi sperimentali (1959), dimostrò come i bambini già in età prescolare siano in grado di risolvere problemi di tipo strutturale (ad esempio calcolare l'area di un parallelogramma conoscendo la formula per calcolare quella dei rettangoli), a meno che essi siano stati sottoposti a un insegnamento di tipo meccanicistico e riproduttivo, basato sulle catene associative descritte dal comportamentismo. Queste evidenze hanno fatto emergere la rilevanza di un apprendimento che favorisca la scoperta della soluzione della situazione problematica, a scapito di brevità ed eleganza della risposta (Hilgard & Bower, 1970). Il problema veniva quindi per la prima volta visto come un obiettivo che il soggetto non sa inizialmente come raggiungere (Baccaglini Frank et al., 2018).

Nonostante lo studio del problem solving vanti una lunga tradizione di ricerca, la forma attraverso cui attualmente i problemi scolastici sono espressi include invece un enunciato, in cui sono presenti dei dati, che si conclude con una domanda (Quanto? Quanti?) o con una richiesta (Calcola, trova. . .). Al bambino è richiesto di leggere, trovare una soluzione e scrivere la risposta. Questa procedura, che implica piuttosto un pensiero di tipo riproduttivo, più simile quindi a un esercizio che a un problema, è un retaggio dall'insegnamento matematico in chiave utilitaristica: in passato venivano infatti presentate delle situazioni verosimili al fine di allenare gli allievi a situazioni professionali plausibilmente riscontrabili nel loro futuro, pratica presente già nell'antica Mesopotamia. Eppure, è oggi difficilmente mutuabile un'idea di matematica quale strumento per una futura professione, che ha piuttosto ceduto il passo a una matematica per la cittadinanza, capace quindi di promuovere pensiero scientifico, capacità critica, abilità di analisi, autonomia, e così via. Ciò non significa che sia necessario svincolare i problemi scolastici dalla realtà quotidiana, ma che essi debbano essere davvero interessanti per gli alunni, promuovere una reale riflessione, restituire un'idea di matematica pregna di senso e significato

(Millán Gasca, 2016).

Le motivazioni per cui il problem solving è un'attività che dovrebbe caratterizzare i processi di insegnamento-apprendimento matematico sono posti su tre piani distinti. Il primo è quello locale, per cui le sfide poste dai problemi matematici stimolano intellettualmente l'alunno favorendone l'apprendimento matematico. Il secondo è quello affettivo, per cui i problemi, agendo su una motivazione di tipo competitivo, rappresentano a qualsiasi livello scolastico l'attività più affascinante durante le lezioni di matematica. Tuttavia, i problemi vengono spesso utilizzati con una finalità valutativa, privando gli alunni di un'occasione in cui poter costruire le proprie competenze in un contesto di piacevolezza per la matematica, considerando la non risoluzione del problema come una possibilità e non come un fallimento (Baccaglini Frank et al., 2018). La piacevolezza del fare matematica passa proprio dalla qualità dei problemi proposti, non è infatti rendendo giocosa la lezione che il bambino coglie la bellezza del fare matematica, ma piuttosto proponendo sfide alla sua portata che lo facciano sentire capace, ma allo stesso tempo mettano in discussione le sue abilità e conoscenze (Millán Gasca, 2016). L'ultimo livello, definito come trasversale, riguarda infine la potenzialità degli apprendimenti matematici: la forma mentis che l'esercizio del problem solving promuove è di natura razionale e generalizzabile. Apprendere a risolvere un problema attraverso un processo produttivo non è solo una competenza matematica, ma anche di cittadinanza (Baccaglini Frank et al., 2018).

Da un punto di vista cognitivo, quando viene presentato un problema in aula, il processo di risoluzione richiede il richiamo dalla memoria a lungo termine di informazioni utili a interpretare la situazione e creare una rappresentazione in seguito alla lettura e alla comprensione del testo del problema stesso. Ciò differisce dall'esercizio, o compito, in quanto quest'ultimo richiede la semplice esecuzione di un algoritmo e/o la replica di una strategia già conosciuta, richiamandoli dalla memoria a lungo termine e applicandoli acriticamente. Un esempio di esercizio sono le operazioni in colonna: dopo aver appreso l'algoritmo della sottrazione con il resto, l'alunno la applica ai nuovi casi presentati. Nel caso del problema, occorre un'effettiva comprensione e la conseguente selezione dalla memoria di un metodo efficace per la soluzione. Una delle strategie risolutive per i problemi aritmetici è invece rappresentata dalla capacità immaginativa, detta imagery (Revlin, 2014). Emerge quindi fin da subito come problem solving e comprensione del testo siano abilità intrinsecamente legate tra loro, nonostante la compartimentazione dei saperi proposta in gran parte delle scuole primarie italiane (Cornoldi & Carretti, 2019). È chiaro che il richiamo dalla memoria a lungo termine e l'imagerycontribuiscano a scopi differenti, tuttavia è innegabile che entrambi siano necessari per arrivare alla soluzione. Il problema, una volta compreso, verrebbe dunque rappresentato mentalmente attraverso l'imagery senza bisogno di una schematizzazione grafica con carta e penna, con conseguente economia in termini temporali. Nei problemi in cui invece non è possibile fare affidamento unicamente alla capacità immaginativa, si fa ricorso all' *insight*, o illuminazione, cioè alla modificazione della rappresentazione mentale del problema e non quindi a un diretto utilizzo della stessa per giungere alla soluzione. Ciò che è importante tenere in considerazione in Didattica della Matematica, è che una delle tipologie di problem solving, il ragionamento analogico, confronta la nuova domanda con quelle già risolte in passato, utilizzando quindi analogie con quanto già noto per risolvere nuovi problemi (Revlin, 2014). Il ragionamento analogico può essere anche di tipo figurale, basato sulla memoria di lavoro visuo-spaziale, che permette al bambino di ricordare informazioni di tipo visuo-spaziale legate al problema posto. Le capacità dell'alunno in questo tipo di memoria hanno quindi diretta influenza sul suo livello di abilità nel problem solving, in quanto permettono di richiamare e manipolare informazioni visuo-spaziali, permettendo in altre parole di rappresentare idealmente il problema e manipolare quest'immagine mentale al fine di trovare la soluzione più opportuna (Resing, Bakker, Pronk, & Elliott, 2017). Durante la lettura di un problema, nei bambini si innesca inoltre un meccanismo di *mimesis*, per cui essi sono più propensi a immedesimarsi nella situazione che ad analizzare il testo, al fine di comprendere quale sia la procedura migliore per risolverlo, comportamento tipico dell'età adulta. La mimesis ha una forte potenzialità didattica: coinvolgere gli alunni in un problema agevola la sua comprensione e la sua risoluzione. Il fine dei problemi matematici dovrebbe infatti essere quello di porre l'alunno in situazione di ricerca di una strategia risolutiva, piuttosto che di individuazione della soluzione voluta dall'insegnante. Per questo motivo un problema non dovrebbe mai avere caratteristica di banalità, non dovrebbe mai essere risolto per routine, ma dovrebbe piuttosto muovere fantasia, creatività, inventiva, applicando la logica. Alla scuola primaria i problemi matematici divengono così un mezzo per fornire ulteriore significato ad apprendimenti quali le quattro operazioni aritmetiche. In questo modo essi rappresentano il motore della didattica, promuovendo interesse, permettendo di esercitare autonomia e iniziativa, garantendo libertà. La risoluzione di un problema matematico richiede infatti un pensiero di tipo produttivo, per cui non deve esistere unicamente la via predeterminata dall'insegnante (Millán Gasca, 2016). Al fine di distinguere un esercizio da un problema matematico, occorre dunque tenere in considerazione quattro elementi propri di un vero problema matematico (Zan & Di Martino, 2017):

- ▷ richiedere un pensiero produttivo, pertanto gli studenti non devono già conoscere il modo in cui risolverlo;
- ▷ perseguire obiettivi di apprendimento significativi;
- ▷ essere autentico, cioè contestualizzato, realistico, al fine di promuovere la mimesis;
- ▷ essere inclusivo, prevedendo molteplici modalità di soluzione, tra cui la non soluzione, e diversi livelli di esplorazione.

Polya (1945) incluse nelle modalità in cui è possibile risolvere un problema matematico il ragionamento euristico, ossia quelle argomentazioni che non abbiano caratteristica di rigorosità e definitività tipiche della matematica, ma che siano plausibili e soprattutto funzionali alla risoluzione di un problema. Il problema dovrebbe quindi avere la caratteristica di una sfida più che di un esercizio, tenendo conto della difficoltà, dei concetti matematici implicati, ma soprattutto dovrebbe essere risolto in libertà, con interventi discreti e non impositivi da parte del docente (Millán Gasca, 2016). In ogni caso, al pari del ragionamento euristico, anche la metacognizione si è rivelata come fattore cruciale di influenza sulle capacità di problem solving. È stato infatti dimostrato da numerosi studi come da un lato conoscere delle procedure e dall'altro applicare delle euristiche sia insufficiente per poter essere in grado di scegliere come procedere, se esse non sono accompagnate da competenze metacognitive (Özsoy & Ataman, 2009). In uno studio recentemente condotto in una scuola primaria veronese, è infatti emerso come solo 18 alunni di classe terza, su un totale di 127, siano riusciti a trovare una risposta al problema: "La classe III A è composta da 16 alunni. Ognuno di loro ritaglia 9 bandierine verdi e 5 gialle per addobbare l'atrio della scuola. Quante bandierine ritaglia tutta la classe?" (Cornoldi & Carretti, 2019, p. 802). Alcuni, in pieno contratto didattico, hanno sommato tutti i numeri presenti, altri, sfruttando l'euristica della plausibilità, hanno proposto i seguenti calcoli: 16×9=144, 16×5=80, 144×80=320, e avanti così (Cornoldi & Carretti, 2019). Senza un controllo sul risultato, qualsiasi risposta potrebbe essere quella corretta. Il valore aggiunto della metacognizione è dato proprio da questo: permette a ciascun alunno, dal più al meno competente, di esercitare un monitoraggio sul proprio operato. Proprio per questo i livelli di metacognizione mostrano una correlazione diretta con quelli di accuratezza (Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015).

Pare dunque evidente che i fattori capaci di influenzare le abilità di problem solving siano molteplici e posti su differenti livelli: quello didattico, in quanto un contratto didattico flessibile, adattabile e aperto alla creatività è funzionale al pensiero produttivo e quindi allo sviluppo di abilità risolutive; e quello cognitivo, dal momento che la memoria di lavoro (e ancor di più quella visuo-spaziale), le euristiche e la metacognizione sono fondamentali per acquisire queste capacità. Se quindi un esercizio matematico prevede che lo studente già conosca la procedura richiesta, un problema deve presentare una situazione inedita. Ciò che invece spesso avviene è che vengano proposti problemi che in realtà hanno le caratteristiche di un esercizio. Inoltre, la fretta che caratterizza molte lezioni di matematica comporta che i bambini con una minor autoefficacia accantonino i problemi in breve tempo, convinti che l'insight o avvenga immediatamente oppure non si manifesti mai. Si instaura così una convinzione per cui l'obiettivo è impossibile da raggiungere e proprio per questo motivo è opportuno respingere pratiche didattiche ancora oggi diffuse nelle aule, che considerano il tempo in matematica come un nemico. Sarebbe piuttosto opportuno consentire invece ai bambini dei momenti di quiete da dedicare ai problemi, oltre alla possibilità di accantonarli momentaneamente per riprenderli in un secondo momento (come suggeriscono le teorie sull'insight: MacGregor, Ormerod, & Chronicle2001). In questo modo viene meno la convinzione per cui la matematica sia costituita da procedure memorizzate da applicare nel minor tempo possibile e che quindi se il loro richiamo non è immediato, nessuna alternativa è possibile. L'auspicio degli studiosi del settore è che queste prassi d'insegnamento cedano il passo a un'idea di matematica come incompiuta, creativa e da costruire (Baccaglini Frank et al., 2018).

L'errore:

Secondo la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau, l'errore assume la definizione di ostacolo, ossia quanto si interponga tra l'alunno e il sapere, disturbandone la costruzione di nuove conoscenze e impedendo così di raggiungere gli obiettivi didattici posti. Esistono diverse tipologie di ostacolo: ostacoli ontogenetici, che nascono dallo studente; ostacoli didattici, causati dalle scelte del docente e ostacoli epistemologici, dovuti a questioni intrinseche alla stessa matematica (Brousseau, 1997). L'incontro tra i bambini e gli oggetti matematici avviene infatti ben prima della loro scolarizzazione: nel mondo attuale, permeato di matematica, già dalla nascita gli alunni si confrontano con quantità, percentuali, probabilità, distanze e così via. Queste occasioni fortuite e informali generano *concezioni matematiche ingenue*, cioè risposte che i bambini formulano nei confronti della realtà in cui vivono, ma che non sono necessariamente di natura scientifica. Un tipico esempio è dato dalla rotazione terrestre: quasi tutti i bambini, basandosi sulla propria esperienza, credono che sia il sole a ruotare attorno alla Terra e non viceversa. È quindi opportuno partire proprio da queste concezioni ingenue per costruire apprendimenti formali. Esse possono contenere germi di verità, oppure essere totalmente errate, ma proporre un nuovo concetto senza aver discusso l'idea preesistente potrebbe portare a uno scollamento tra quanto appreso a scuola e quanto esperito da ogni alunno. Ciò è didatticamente controproducente, in quanto mina alle basi dell'educazione matematica e del pensiero razionale. È infatti piuttosto opportuno partire dalle concezioni matematiche ingenue per mostrare l'alternativa scientificamente fondata, motivandola e facendo comprendere al bambino la sua vantaggiosità. Spesso le idee ingenue formulate a partire dal contatto diretto con la realtà richiedono una sostituzione con teorie definite come controintuitive, quindi di difficile acquisizione: per questo occorre evitare di dare per scontato che teorie ingenue siano state sostituite da teorie formali e scientifiche, magari in virtù dell'età dell'alunno, ed occorre piuttosto accertarsi sempre di quali siano le fondamenta delle conoscenze degli studenti, al fine di evitare conflitti cognitivi (Millán Gasca, 2016). Ciò che infatti può accadere, è che un insegnante consideri come errore le conoscenze ingenue, con il rischio di non sostituirle mai interamente, ma solo di porvi un'etichetta che tuttavia è poco funzionale all'apprendimento. Indagare le motivazioni e le modalità in cui l'errore viene espresso nel fare matematica significa coinvolgere nell'azione educativa ciò che viene considerato come un aspetto negativo. Sondare le manifestazioni di incomprensioni permette di rendere la lezione per tutti la lezione per ciascuno (Castelnuovo, 2017). Da un punto di vista didattico, l'errore assume così valore pedagogico: analizzare le scelte operate dal bambino permette all'insegnante da un lato di considerare i processi cognitivi sottesi, le strategie risolutive messe in campo, i ragionamenti seguiti (valore formativo per l'alunno), dall'altro di ridefinire la progettazione didattica, apportando modifiche tali da rispondere ai bisogni formativi emersi dall'analisi degli errori (valore regolativo per l'insegnante; Capperucci, 2017).

In tutti i gradi e ordini scolastici, compreso quello universitario, vi è poi una pratica didattica per cui l'errore è considerato come un indicatore di difficoltà in matematica. Questa identificazione comporta che l'assenza di errori venga fatta coincidere con l'assenza di difficoltà e il suo contrario. Numerosi studi hanno tuttavia sollevato perplessità riguardo a questa convinzione, sviscerandone sia i presupposti poco realistici, sia le negative conseguenze didattiche. Il ruolo dell'errore è infatti fortemente formativo, da un lato permettendo di costruire la competenza, dall'altro essendo insito già nello sviluppo delle teorie matematiche. La storia della matematica abbonda di revisioni, correzioni, tentativi falliti, e identificare l'errore come un'entità a-matematica (o, nel peggiore dei casi, anti-matematica) distorce la visione che il bambino in apprendimento ha di essa. Porre molta attenzione sull'identificazione degli errori compiuti dagli alunni promuove infatti un atteggiamento volto a limitare le occasioni di sbaglio, in favore del maggior numero possibile di risposte corrette. Di conseguenza vi è da parte del docente una resistenza al proporre compiti sfidanti, quali ad esempio il problem solving, per il timore di osservare un maggior numero di errori. Quando ciò avviene, c'è la tendenza a etichettare queste attività come eccessivamente difficili, in un tentativo di giustificazione che non tiene conto del valore formativo dell'errore. La scuola dovrebbe infatti essere una palestra per la matematica, uno spazio protetto in cui sperimentare liberamente situazioni sfidanti e difficoltà da superare. Tale atteggiamento da parte degli insegnanti potrebbe essere ricondotto all'errata convinzione che l'errore matematico sia incontrovertibile: se quindi un errore in geografia potrebbe essere discusso, in matematica ciò non può avvenire in quanto essa è oggettiva. Questa tipologia di pensiero deriva da una concezione errata della matematica stessa ed è causa di scelte educative volte alla promozione di un apprendimento di tipo riproduttivo, con un focus sul prodotto (risultato) più che sulle procedure messe in atto. Questa prassi didattica non solo è scoraggiata dalle Indicazioni nazionali (2012), ma tradisce la natura stessa della matematica. Essa ha infatti come conseguenza da un lato la disaffezione per la disciplina e la manifestazione di sentimenti negativi nei suoi confronti, dall'altro lo sviluppo di teorie del successo che portano l'insegnante a promuovere attività di tipo riproduttivo (Baccaglini Frank et al., 2018). Nel primo caso emerge una paura per l'errore matematico che pare essere l'emozione prevalentemente associata alla propria esperienza di apprendimento della matematica fin dai primi anni di scuola, in quanto le teorie di successo promosse fanno coincidere il successo formativo con l'assenza di errori (Di Martino & Zan, 2011). Dall'altro, le esperienze vissute durante il proprio percorso formativo determinano le convinzioni relative ai fattori determinanti il successo o il fallimento in uno specifico contesto. Queste convinzioni, rinforzate dalle esperienze vissute a scuola e, soprattutto, dal valore attribuito dall'insegnante all'errore, si tramutano con il tempo in teorie del successo capaci di influenzare la percezione nei confronti della stessa matematica (Nicholls, Cobb, Wood, Yackel, & Patashnick, 1990). L'attesa da parte dei docenti del maggior numero possibile di risposte corrette da parte degli allievi li spinge inoltre a descrivere qualsiasi produzione degli alunni in termini matematici, presupponendo cioè che essi abbiano compiuto un'elaborazione concettuale, pur in assenza di una sua evidenza. Un alunno imbrigliato in un rigido contratto didattico potrebbe infatti aver svolto una serie di passaggi corretti, giungendo così a un risultato soddisfacente, malgrado la sua totale assenza di comprensione a riguardo. Allo stesso tempo, quest'aspettativa li induce a non proporre attività eccessivamente varie, al fine di evitare errori che sono appunto dovuti dal fatto che l'alunno non ha realmente appreso un oggetto matematico, ma sta applicando una procedura mostrata più o meno esplicitamente dall'insegnante stesso. Prendiamo ad esempio il seguente esercizio proposto in una classe prima della scuola primaria: riscrivi i numeri in ordine crescente (numeri dati 5, 2, 1, 4, 3). Poniamo ora che uno specifico alunno lo svolga scrivendo: 1, 2, 3, 4, 5. Se da questo l'insegnante affermasse che il bambino conosce il concetto di ordine crescente, si tratterebbe con grande probabilità di *effetto Jourdain*. Lo studente potrebbe infatti aver riconosciuto i numeri e averli scritti secondo la stringa numerica memorizzata verbalmente e associata al segno grafico, in altre parole saprebbe a memoria la successione dei numeri, combinandola alla rappresentazione in formato arabico, ma non vi è prova del fatto che lui sappia associarvi una quantità. Potrebbe in altre parole non saper ordinare la stessa successione se presentata con una rappresentazione analogica. Questo effetto, che è parte integrante del contratto didattico, induce il docente a evitare di proporre alla classe esercizi che necessariamente implichino l'utilizzo dell'oggetto matematico coinvolto, in questo caso le quantità numeriche e le loro proprietà, sacrificandone l'apprendimento in virtù di una presunta maggiore accuratezza. Si limiterà piuttosto a presentare attività analoghe a quelle già affrontate in classe (Marazzani, 2009).

Considerare l'errore e la velocità come indicatori di successo formativo porta oltretutto a una nociva sovrapposizione del concetto di competenza matematica su quello del richiamo di informazioni dalla memoria a lungo termine. L'inevitabile conseguenza è che vengono considerati come poco bravi in matematica alunni che in realtà hanno un approccio creativo e costruttivo alla disciplina, mentre al contrario si creano delle fallaci basi matematiche in quanti considerati bravi per il semplice fatto di saper riprodurre in breve tempo esercizi e richieste da parte degli insegnanti. La precarietà di queste fondamenta comporta, nel passaggio tra i diversi ordini e gradi scolastici, una profonda messa in discussione dell'alunno stesso, che da competente viene considerato improvvisamente come incapace di mettere in atto strategie di apprendimento adeguate. Ciò comporta che gli studenti non riescano a costruire un'immagine di sé favorevole all'apprendimento, in quanto comportamenti precedentemente risultati efficaci improvvisamente e inspiegabilmente sembrano non funzionare più. La causa di questo repentino cambiamento ricade quindi sullo stesso alunno, che si persuade di essere improvvisamente divenuto incapace. A tale fenomeno si aggiunge la deleteria convinzione, piuttosto diffusa sia all'interno della scuola sia delle famiglie, che esista una predisposizione per la matematica, in estrema sintesi quindi che portati per questa disciplina o si nasce o non si diventerà mai (Baccaglini Frank, et al., 2018). La teoria attribuzionale (Hewstone, 1991) ha infatti definito come i fattori di successo o di fallimento vengano classificati attraverso tre indicatori:

- locus, che può essere interno o esterno al soggetto;
- stabilità o instabilità;
- controllabilità o incontrollabilità.

Attraverso questi indicatori ogni individuo attribuisce quindi gli episodi di successo o insuccesso formativo a se stesso piuttosto che ad altre persone, quali l'insegnante, a elementi stabili, come ad esempio il fatto di credere di essere portato o meno per la matematica, e su cui egli ha diretta influenza, come il ritenere che l'esercizio comporti un miglioramento in una specifica abilità (Weiner, 1974). Un interessante studio condotto con studenti universitari di matematica, soggetti quindi tipicamente considerati bravi in questa disciplina nel loro percorso scolastico, ha fatto emergere le loro stesse convinzioni di essere portati per la matematica e, ancora, la credenza per cui le difficoltà riscontrate durante il percorso accademico siano imputabili a un improvviso venir meno di questa predisposizione (Di Martino, & Gregorio, 2019). L'irreversibilità percepita è causa di frustrazione in studenti adulti, con alle spalle un percorso formativo brillante, pare di conseguenza estremamente dannosa la diffusione di tali idee nei primi gradi di scolarizzazione. Incentivare piuttosto attività di tipo produttivo ed evitare quelle riproduttive permette non solo allo studente di non sviluppare una teoria del successo legata a un locus esterno, oltre che a fattori stabili e incontrollabili, ma anche all'insegnante di considerare l'errore come formativo. Già partire dagli anni '80, La Didattica della Matematica ha indagato il valore dell'errore nel processo di insegnamento-apprendimento, considerato come spunto di riflessione sia sulla disciplina che sulla sua didattica. È sorta poi una riflessione sulla relazione tra l'errore e il tempo concesso a scuola, giungendo a definire la variabile temporale come cruciale, in quanto consentirebbe agli alunni di riflettere lungamente su compiti e quesiti, permettendo una riflessione profonda e autentica e non solo un mero esercizio di richiamo dalla memoria. Risultando inoltre fondamentale la scelta da parte del docente delle attività didattiche, si è sviluppata una riflessione sulla formazione insegnanti e sulle competenze loro necessarie. Assumendo che la conoscenza posseduta dal docente influenzi inevitabilmente le proprie scelte didattiche, oltre alle competenze generali, per insegnare matematica sembra essere fondamentale l'*interpretation knowledge*, ossia la competenza di comprendere e attribuire un senso alle produzioni degli studenti in chiave matematica. Tale conoscenza presuppone una profonda capacità di analisi dei processi, che si lega indissolubilmente all'abilità degli alunni di argomentare le loro scelte procedurali: di qui l'importanza della promozione dell'argomentazione fin dai primi anni di scolarizzazione. Non è infatti possibile per l'insegnante comprendere il ragionamento sotteso alla produzione matematica e quindi coglierne il significato né il processo contenuto se l'alunno non è in grado di giustificare e motivare le proprie scelte. In ultima istanza, l'assenza dell'interpretation knowledge sembra essere foriera di una considerazione dell'errore in chiave dicotomica giusto/sbagliato, privando di fatto l'insegnante di una profondità di analisi e limitandone quindi l'azione didattica (Zan, 2007; Mellone, Ribeiro, & Jakobsen, 2018).

3.1.4 I modelli didattici di riferimento in Italia

La scuola non si esprime mai attraverso un modello unitario e univoco di discente e di insegnante. Ciò implica che l'azione educativa quotidianamente attuata in classe sia frutto di scelte pedagogiche, a loro volta influenzate dal modo in cui il docente concepisce sia l'alunno stesso, che il processo di insegnamento-apprendimento. L'azione didattica, lungi dall'essere frutto di un'ingenua scelta pedagogica, è lo strumento attraverso il quale il docente trasmette il proprio messaggio educativo (Bruner, 2011). Per di più, il processo di insegnamento-apprendimento si fonda sulla cultura presente nel Paese di appartenenza e si articola sull'idea di studio come diritto/dovere delle fasce più giovani della popolazione (Ambrisi, 2015).

In particolare, il ruolo dell'insegnante di matematica è quello di selezionare e proporre temi, attività, esercizi che promuovano gli apprendimenti in tale ambito. Eppure scelte didattiche consapevoli trovano origine unicamente in una preparazione professionale capace di fornire i docenti di una visione culturale della matematica. In altre parole è ad essi richiesto di avere familiarità con essa, al fine di essere in grado di accompagnare i bambini nel loro cammino all'interno del paesaggio della matematica elementare, promuovendone l'aspetto formativo soprattutto tra quanti tengono le distanze, alimentando il piacere di fare matematica (Millán Gasca, 2016).

Ciò che invece emerge, è come "un'errata interpretazione del concetto di 'programmazione didattica', intesa da molti docenti come arbitrio nelle scelte, ha condotto spesso ad escludere i contenuti nuovi delle proposte ed a rifugiarsi nell'inerzia dell'insegnamento tradizionale" (Ciarrapico, 2002, p. 128). L'insegnamento della matematica alla scuola primaria può infatti essere paragonato a un addestramento all'utilizzo delle cifre da 1 a 9, oltre allo zero, al fine di scrivere numeri e risolvere i calcoli. Come visto nel capitolo precedente, questa pratica affonda le proprie profonde radici nella storia dell'insegnamento matematico: viene definita come *matematica delle mute*, in quanto nel Medioevo vennero definite delle specifiche tappe da affrontare durante gli insegnamenti matematici di base, che vengono appunto tutt'oggi ripercorse. La longevità di questo tipo di insegnamento ha molteplici motivazioni: da un lato si riscontra un'inerzia dell'insegnamento, un cedere all'abitudine e al mantenere inalterate le pratiche didattiche, dall'altro la rigidità della programmazione fornisce una cornice chiara e ben delineata all'azione didattica giustificandola, supportandola e mutuandola. Osservando questo processo dal punto di vista dell'alunno, emerge come non sia foriero di un tipo di insegnamento-apprendimento vantaggioso per quest'ultimo. Vi è infatti una propensione a favorire l'aritmetica a discapito ad esempio della geometria, nonostante numerosi studiosi abbiano evidenziato il potenziale di quest'ultima per l'apprendimento matematico. Vi è inoltre una prassi ad affrontare le questioni matematiche in maniera rigida e preimpostata: come visto nel precedente paragrafo, i problemi matematici vengono spesso resi delle mere procedure il cui unico scopo è risolvere dei calcoli, snaturando totalmente la loro essenza in termini matematici. In questo modo si privano gli studenti del fascino della matematica che comprende sì l'uso della mente ma anche una buona dose di immaginazione e creatività (Millán Gasca, 2016). I metodi di insegnamento utilizzati soprattutto nei primi anni di scolarizzazione dovrebbero mettere il bambino al centro dell'azione educativa, promuovendo il dialogo, fondamentale in matematica per imparare ad esempio a sostenere un'argomentazione, ma soprattutto favorendo la comprensione della matematica, influenzando così positivamente la visione che i bambini hanno della matematica stessa. Ciò che va evitato è appunto la proposta di una matematica come meramente procedurale, non abolendo l'insegnamento delle procedure che sono e restano fondamentali, ma utilizzandole per muovere negli alunni un pensiero matematico (Millán Gasca, 2016).

Le Indicazioni per il Curricolo (2012, p. 60) suggeriscono una didattica che promuova "un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo". In altre parole si auspica una didattica incentrata sul problem solving, che consideri l'errore come occasione formativa, capace di rompere il contratto didattico e di proporre situazioni a-didattiche, tenendo sempre a mente della natura astratta e inarrivabile attraverso i sensi degli oggetti matematici. Dall'ultima indagine TALIS (OECD, 2019) emerge invece come gli insegnanti italiani che dichiarano di lasciare libera scelta agli studenti in merito alle procedure da seguire siano pari al 43% del totale. Risulta inoltre generalmente inferiore alla media OCSE il numero dei docenti che utilizza l'autovalutazione e che fornisce un feedback immediato agli alunni, non utilizzando quindi gli errori come occasioni di apprendimento. Dal punto di vista della formazione iniziale dei docenti, solo il 64% ha ricevuto un'istruzione specifica su contenuti disciplinari e didattici (a fronte del 79% di media OCSE). Questi risultati confermano le evidenze relative al modello di didattica trasmissiva come quello più diffuso nelle scuole italiane per l'insegnamento della matematica (Baccaglini Frank et al., 2018).

3.2 Apprendimenti matematici

In questo secondo paragrafo sarà dedicata maggiore attenzione a quanto concerne l'apprendimento, osservando quindi la formazione dal punto di vista dell'alunno. Saranno pertanto illustrati i fattori che maggiormente influenzano il percorso scolastico di bambini e bambine, illustrandone i principi teorici e le applicazioni didattiche.

3.2.1 NUMERACY E COMPETENZA MATEMATICA

Dopo la conclusione della seconda guerra mondiale in moltissimi paesi, tra cui l'intera Europa, emerse la necessità di diffondere l'insegnamento matematico a tutti i cittadini a partire dalla scolarizzazione di base: questo sentire comune era l'espressione di idee che serpeggiavano già dal secolo precedente: nel 1899, Laissent, primo tra molti pedagogisti e matematici, sostenne che l'educazione matematica di base servisse non a formare scienziati, ma a fornire a ciascuno nozioni fondamentali per la vita (Baccaglini Frank et al., 2018; Millán Gasca, 2016). Col tempo, questa educazione matematica di base prese il nome di *numeracy*. Con numeracy qui si intende l'insieme delle competenze, delle abilità e delle conoscenze matematiche di base che coinvolgono le capacità di ragionare in termini matematici, di porre e risolvere problemi matematici e di applicare il pensiero matematico al fine di risolvere problemi reali. Essa è intrinsecamente collegata al pensiero logico, alla cognizione spaziale, all'uso di modelli, di grafici e di tabelle e alla comprensione del ruolo della matematica nella società (OECD, 2003; McKay, 2018). Si riferisce, in altre parole, a quelle conoscenze, abilità e competenze che vengono poste come obiettivi dell'educazione formale, in quanto acquisizioni fondamentali per garantire a ciascuno di essere cittadino attivo nella società della conoscenza e professionista competitivo nelle moderne economie (European Parliament and Council, 2019).

Eppure, l'acquisizione della numeracy non avviene unicamente durante il percorso scolastico di ciascun individuo, ma comincia già dalla nascita. In virtù della sua complessità, essa fonda infatti il suo apprendimento su abilità e conoscenze in parte innate, in parte apprese tramite l'educazione formale (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene, & Zorzi, 2010; Geary, 2013). Invero, a livello filogenetico, le acquisizioni culturalmente connotate sono state apprese solo di recente (circa 3000 anni fa) e ad oggi non possono ancora essere definite come universali (ad esempio nella lingua munduruku, parlata dall'omonima popolazione residente nella foresta amazzonica brasiliana, non vi è alcuna forma di scrittura, né esistono parole per indicare numerosità maggiori di 5, come riportato da Pica e colleghi nel 2004). Ciò significa che lo sforzo compiuto da ciascun bambino per apprendere la matematica formale è significativo, in quanto a livello neurale non esistono strutture già predisposte a questo scopo. Alcuni studi neuroscientifici hanno infatti rilevato forti corrispondenze nei circuiti cerebrali utilizzati sia per la lettura che per il calcolo tra individui appartenenti a culture differenti, avallando l'ipotesi del riciclaggio culturale di mappe neurali preesistenti (Dehaene & Cohen, 2007). Esisterebbero dunque delle reti neurali di base, atte a supportare funzioni innate (comparse all'inizio della storia evolutiva dell'essere umano) che fungono da start-up neurocognitivi alle acquisizioni culturali, come accade nel caso della lettura e del calcolo (Dehaene-Lambertz, Hertz-Pannier, Dubois, Mériaux, Roche, Sigman, & Dehaene, 2006). Come anticipato, esistono tuttavia abilità innate, presenti in ciascun individuo per lo meno a partire dalla nascita, che sostengono le acquisizioni formali successive. Nel caso della matematica, lo start-up è dato dalla percezione di numerosità, ossia la capacità di estrarre informazioni riguardo la numerosità di un qualsiasi insieme. Ben prima di aver appreso il conteggio formale siamo infatti in grado di ottenere dati relativi alla numerosità attraverso due principali sistemi, detti *core systems*, peraltro condivisi con alcune specie animali:

a) il sistema del senso del numero (ANS: Approximate Number System);

b) il subitizing (OTS: Object Tracking System).

Questi due sistemi, pur fondandosi entrambi sulla percezione visiva, forniscono informazioni riguardo alla quantità in maniera dissimile: il senso del numero permette di percepire differenze numeriche tra insiemi differenti tra loro e consente di elaborare delle stime approssimative (per questa ragione non vi sono limiti nella capacità, quindi la grandezza dell'insieme è indifferente, ma piuttosto nell'acuità: la precisione diminuisce quando le numerosità dei due diversi insiemi si avvicinano), il subitizing invece restituisce una numerosità precisa, ma è limitato a insiemi contenenti fino a 4 unità. Entrambi sono innati e permettono già nel neonato di prevedere il risultato di somme e sottrazioni, distinguere numerosità crescenti e decrescenti e persino calcolare la probabilità di eventi reali (Butterworth, 2018; Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004; Xu & Spelke, 2000).

Nell'apprendimento della numeracy ha tuttavia maggior rilevanza il sistema del senso del numero: il suo grado di maturazione è correlato con velocità ed efficacia dei futuri apprendimenti, soprattutto nel calcolo scritto e nelle rappresentazioni simboliche di quantità, mentre il sistema del subitizing raggiunge la massima maturazione entro l'anno di vita e non sembra essere predittore del futuro grado di competenza matematica (Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011). La correlazione con il sistema del senso del numero trova ulteriore fondamento a livello neurologico: nei bambini con discalculia la mappa neurale che sostiene l'ANS, posta nella corteccia parietale, è ipoattiva (Price, Holloway, Räsänen, Vesterinen, & Ansari, 2007). In aggiunta, altre evidenze ottenute con tecniche di fMRI dimostrano come quello stesso sistema neurale si attivi anche per la detezione e l'elaborazione di simboli numerici e l'esecuzione di calcoli mentali (Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003).

Come visto nel precedente capitolo, Piaget, che fu il primo a definire delle teorie sui processi legati alla cognizione numerica, circoscrisse attorno al sesto anno di vita il momento in cui il bambino comprenderebbe un'idea di numerosità, in quanto appunto astratta, quindi inafferrabile dal pensiero infantile che, fino a quell'età, era definito come concreto (Piaget & Szeminska, 1968). Eppure, contrariamente a quanto affermato dall'autore, oggi sappiamo come l'idea di numerosità non derivi dal consolidamento di alcuni costrutti logici, ma piuttosto sia innata in ognuno di noi, fatta eccezione per alcuni soggetti affetti da discalculia (Mussolin, De Volder, Grandin, Schlögel, Nassogne, & Noël, 2010). Nonostante le recenti evidenze, la teoria piagetiana è così radicata nei sistemi scolastici da influire ancora oggi sulle pratiche didattiche di moltissimi Paesi, tra cui l'Italia, con gravi effetti sui risultati conseguiti. Si considerino ad esempio i primi anni di scolarizzazione: pur rappresentando il periodo con il maggior impatto sulla formazione matematica, non prevedono consistenti insegnamenti formali (Mulligan et al., 2018). Le Indicazioni per il Curricolo (2012), che sottolineano ancora come i simboli numerici siano legati all'astrazione e pertanto vadano introdotti gradualmente, secondo un approccio ancora fondato sulle teorie piagetiane, includono tra i traguardi per lo sviluppo per la competenza alla scuola dell'infanzia:

a) il confronto tra quantità;

b) il saperle contrassegnare simbolicamente;

c) l'avere familiarità con il conteggio e con le operazioni con i numeri.

Apparentemente potrebbe quindi sembrare che nei primi anni di scolarizzazione in Italia sia auspicato l'apprendimento della matematica, ma purtroppo la vaghezza terminologica e scientifica degli obiettivi dà adito ad applicazioni didattiche eterogenee. Non viene di fatto specificato quali registri simbolici siano da includere, né cosa si intenda con confronto tra quantità (gruppi di diversa numerosità oppure differenti rappresentazioni formali, o altro ancora?), e anche il termine "familiarità" associato al conteggio dà luogo a interpretazioni (si veda ad esempio l'effetto Jourdain a riguardo), così come le operazioni con i numeri non risultano un obiettivo chiaro (anche le disequazioni potrebbero essere ricondotte a operazioni con i numeri, ma non sono evidentemente alla portata di bambini di cinque anni). Questa vaghezza, che lascia ampio spazio alla lettura da parte di ciascun insegnante, richiederebbe una competenza professionale da parte dell'intero corpo docente di livello superiore rispetto a quello attuale. Come anticipato nei paragrafi precedenti, tra i vari aspetti della professionalità docente, l'interpretation knowledge risulta imprescindibile per poter valutare efficacemente le produzioni matematiche dei bambini, ma questa conoscenza risulta ancora limitata nel Paese (Zan, 2007; Mellone, Ribeiro, & Jakobsen, 2018). Eppure, è proprio alla scuola dell'infanzia che i bambini passano da capacità innate (come il sistema del senso del numero o il subitizing) ad abilità formali, sfruttando appunto lo start-up neurocognitivo del sistema del senso del numero che sosterrà la futura acquisizione della numeracy (Butterworth, 2005). Questa fase è pertanto assolutamente cruciale, costituendo il ponte tra una base comune e una differenziazione culturale. In particolare, il sistema del senso del numero subisce una modificazione durante l'infanzia, passando dal fondarsi su di una linea numerica mentale analogica, ossia logaritmica e compressa, a una linea numerica mentale lineare, giungendo così alla rappresentazione numerica spaziale condivisa dagli adulti, detta formale. Il passaggio dalla prima alla seconda linea numerica mentale è in ogni caso graduale e segue sia la maturazione neurocognitiva che l'incremento delle acquisizioni culturali da parte del bambino, in particolare l'apprendimento del conteggio e delle parole-numero (Halberda, Mazzocco, & Feigenson, 2008). Sicuramente una rappresentazione numerica mentale efficace è particolarmente rilevante per la Didattica della Matematica, in quanto non solo è correlata con i futuri risultati in matematica, ma alcune evidenze mostrano come sembri costituire la più importante abilità di base nelle prime fasi dell'apprendimento matematico (Lyons & Ansari, 2015). In dettaglio, i bambini all'ultimo anno della scuola dell'infanzia mostrano generalmente una linea numerica mentale lineare per i numeri che vanno fino al 10, mentre tornano alla rappresentazione logaritmica quando la richiesta si amplia fino al 100 (Berteletti et al., 2010; Piazza et al., 2010). I risultati si spiegano alla luce di due effetti derivanti dalla rappresentazione numerica analogica, in termini di velocità di risposta e di accuratezza:

a) l'effetto "distanza", per cui due numeri vicini tra loro sono difficilmente distinguibili (come ad esempio numeri successivi);

b) l'effetto "grandezza", per cui la difficoltà a distinguere due numeri è direttamente proporzionale alla loro grandezza.

Ciò avviene in virtù del processo d'apprendimento per cui attribuiamo a rappresentazioni mentali pre-esistenti (e dunque analogiche) valori numerici arbitrari e simbolici, quali i numeri espressi in formato arabico (Chinello, de Hevia, Geraci, & Girelli, 2013). Di fatto, in compiti che richiedono il confronto approssimativo tra numeri, sia in formato simbolico che analogico, sia negli adulti che nei bambini, i due effetti agiscono in maniera congiunta, prendendo il nome di *effetto del rapporto*. Questo dimostra ancora una volta come il sistema del senso del numero supporti alcune abilità numeriche, persino nelle fasi più avanzate dell'apprendimento e dello sviluppo cognitivo

(Chinello, Cattani, Bonfiglioli, Dehaene, & Piazza, 2013).

L'acquisizione del conteggio e della relativa disposizione numerica nello spazio va però ben oltre al percepire e distinguere numerosità: esso fa piuttosto riferimento al conteggio di ordinamenti molto ampi, tenendo traccia nella memoria delle operazioni eseguite, per poter poi operare su tali ordinamenti. Il processo di acquisizione delle abilità di conteggio è formale e dura circa dal secondo al sesto anno di vita, concludendosi quindi in corrispondenza dell'inizio della scuola primaria (Sarnecka & Carey, 2008). Fuson nel 1988 affermò inoltre che primi apprendimenti matematici sono legati all'acquisizione linguistica. Tra i patterns verbali riconosciuti dal bambino, vi è infatti la sequenza numerica, oltre a una costellazione di indicazioni relative alla quantità. Con il compimento del primo anno, tutti i bambini immersi in un ambiente favorevole alle esperienze numeriche (quale quello in cui gli adulti di riferimento utilizzano quotidianamente riferimenti matematici, come ad esempio i numeri) includono nelle proprie produzioni linguistiche parole numerali cardinali. Queste produzioni non sono estemporanee, ma utilizzate in contesto, in riferimento a una situazione condivisa generalmente con l'adulto. Ciò viene definito come *prima esperienza matematica*. L'interazione adulto bambino, sempre fortemente ancorata all'ambiente in cui essi si trovano, è infatti caratterizzata da una forte evoluzione linguistica in cui trova luogo l'apprendimento dei concetti di base dell'aritmetica e della geometria, come ad esempio il conteggio, la corrispondenza ("uguale") e la variazione di quantità ("più", "ancora"), in particolare in riferimento al sistema analogico (Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003; Millán Gasca, 2016). Per questa ragione la scuola dell'infanzia dovrebbe supportare gli apprendimenti fornendo occasioni di prime esperienze matematiche, considerando la sua funzione democratica e quindi a sostegno di quei bambini privi di questo tipo di esperienze nell'ambiente domestico. Numerosi studi hanno invero evidenziato come già prima dell'inizio della scuola dell'infanzia esista una discrepanza nei livelli di acquisizione matematica correlata al background socio-economico della famiglia di appartenenza. Sembrerebbe infatti che nelle famiglie con un livello socio-economico medio o alto vengano proposte più attività, quali ad esempio giochi in scatola, capaci di promuovere i primi apprendimenti matematici (Elliott, Braham, & Libertus, 2017; Ramani & Scalise, 2020; Skwarchuk, Sowinski, & LeFevre, 2014).

Alla scuola primaria, le acquisizioni matematiche già esistenti vanno a costituire una base per gli apprendimenti successivi, che nel loro complesso andranno a comporre la numeracy di ciascun alunno. Alla luce della rilevanza sociale della competenza matematica, molti Paesi hanno compiuto e tuttora compiono sforzi anche economici al fine di sostenerla e promuoverla (Baccaglini Frank et al., 2018). In particolare, le evidenze ottenute hanno definito come gli insegnamenti dovrebbero da un lato fondarsi anche su studi neuroscientifici, e non solo pedagogici e matematici, che hanno illustrato il motivo di numerosi ostacoli epistemologici in matematica (e che saranno illustrati nel capitolo successivo), dall'altro tenere sempre conto del vissuto di ciascun alunno. In particolare, durante i primi anni della scuola primaria, si sincronizzano le abilità di recupero dalla memoria di strategie procedurali e di ricostruzione del calcolo. I processi non sono infatti ancora giunti a quella maturazione necessaria affinché siano automatizzati (divenendo fatti aritmetici), ed è quindi necessario utilizzare plurime strategie al fine di ottenere velocità e precisione di calcolo (Ashcraft & Faust, 1994; Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003; McCloskey, Harley, & Sokol, 1991). Geary (2013) propose un'ipotesi evolutiva delle abilità di conteggio: da una procedura totale o counting all (contare entrambi gli addendi) si passa al contare in avanti o counting on (Groen & Parkman, 1972), in cui il conteggio degli addendi è sequenziale, per giungere all'utilizzo delle dita come mero supporto visivo, per ottenere maggior velocità. In questo modo il carico cognitivo diminuisce e vengono evitati errori tipici del conteggio con le mani (risultati con un errore di $\pm$ 5). Infine gli apprendimenti si consolidano in fatti aritmetici, ossia calcoli semplici di cui si ricorda il risultato e che supportano calcoli più complessi. Ne sono un tipico esempio le tabelline (Poli, Molin & Lucangeli, 2014). L'iter appena descritto, che solitamente i bambini percorrono durante la scuola primaria, sembra essere frutto di

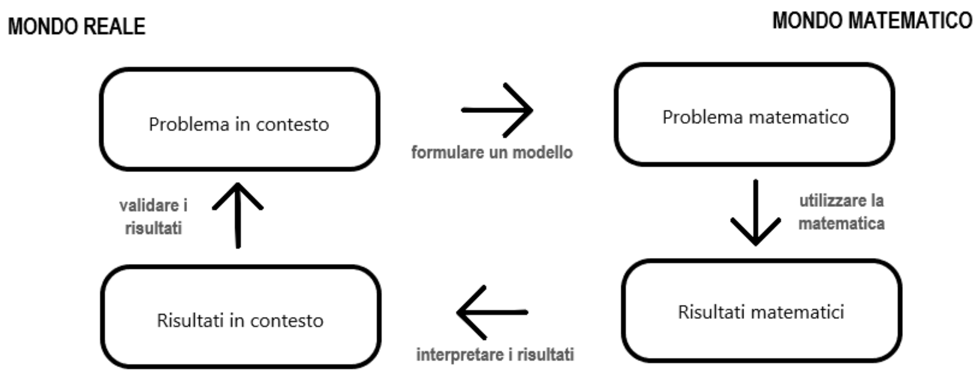


Figura 3.2: Ciclo della modellizzazione (OECD, 2004).

scelte didattiche più che dovuto a un'evoluzione cognitiva: promuovendo infatti la sottrazione e l'addizione non basate sul conteggio, ma piuttosto sulla relazione tra tutto e parti, gli studenti sembrano gestire con maggiore efficacia le operazioni. In altre parole, per sommare 3 e 7, si può proporre all'alunno di sollevare sette dita, contare fino a tre sollevando un dito per numero e poi contare il totale delle dita alzate, oppure considerare la decina come intero e 7 e 3 come parti che la compongono. Questa seconda strategia didattica sembra essere maggiormente funzionale (Gaidoschik, 2019a).

Per quanto invece riguarda il problem solving, nel quadro teorico delle prove Pisa viene descritto il ciclo di modellizzazione, un ciclo attraverso cui i bambini dovrebbero affrontare i quesiti matematici contestuali e che esplicita l'idea di numeracy sottesa: Come visibile in figura 3.2, il vissuto degli alunni dovrebbe costituire metà del processo didattico, mentre invece l'approccio degli insegnanti italiani pare essere focalizzato unicamente sulla metà di destra, ossia quella maggiormente legata al contesto d'aula, e questo potrebbe contribuire a spiegare i bassi livelli ottenuti nelle rilevazioni internazionali dagli studenti italiani in matematica (Baccaglini Frank et al., 2018). Il fatto di non raggiungere un buon livello di numeracy è particolarmente serio in quanto esiste una correlazione tra il livello di competenze matematiche dei soggetti e il loro successo accademico e finanziario (con influenze dirette sul prodotto interno lordo del loro Paese), come riportato da molti autori, tra i quali Budd e collaboratori (2015), Butterworth e colleghi (2015) e Koyama e collaboratori (2017). Per queste ragioni occorrono strumenti efficaci per rispondere ai diversi bisogni educativi espressi nelle classi, soprattutto quando vengono manifestate difficoltà nell'apprendimento matematico.

Nonostante le evidenze, negli ultimi due decenni sono sorte nuove problematiche e sfide educative salienti, tra cui il *justification problem*, ossia "la necessità di giustificare il senso dell'educazione in matematica per tutti" (Baccaglini Frank et al., 2018, p. 94). Le difficoltà riscontrate da moltissimi studenti in matematica hanno infatti sollevato dubbi riguardo l'insegnamento della matematica per tutti. Niss (2003) ha identificato due ragioni cardine a sostegno del fatto che l'educazione matematica sia imprescindibile per chiunque: in primo luogo l'insegnamento matematico porta gli alunni (e quindi i cittadini) a ragionare in maniera razionale, in secondo luogo la matematica permea ogni ambiente di vita, risultando pertanto imprescindibile nella vita quotidiana. Essa infatti si espande con la vita stessa, indagando inediti ambiti della scienza e della tecnologia, rivelandosi pertanto cruciale per le economie attuali. Di conseguenza, da un lato le scienze matematiche sono necessariamente in costante sviluppo, sviluppo che negli ultimi decenni ha implicato un crescente meticciamento con altri ambiti disciplinari, dall'altro noi tutti ci troviamo immersi in un ambiente fortemente matematico, pur senza a volte rendercene necessariamente conto. Per utilizzare una metafora, è come se navigassimo su di un mare costituito da matematica: pur non conoscendo la composizione dell'acqua, essa ci è necessaria per procedere nel nostro viaggio. Conoscere le correnti, le maree, il moto ondoso ci rende però navigatori sicuri, di qui la fondamentale importanza della matematica per la società presente e futura (Baccaglini Frank et al., 2018). Niss elaborò quindi una risposta al justification problem, articolata in due livelli: a livello individuale, ogni alunno dovrebbe avere la possibilità di apprendere efficacemente la matematica durante tutto il suo percorso scolastico (quindi a partire perlomeno dalla scuola dell'infanzia), cogliendone l'importanza a prescindere dalle sue aspirazioni; a livello sociale promuovendo l'importanza della matematica e delle sue applicazioni nella vita privata e professionale di ciascuno, incoraggiando e sostenendo gli sforzi, anche economici, compiuti dalla società per promuovere l'apprendimento matematico. Egli fece quindi una comparazione tra l'apprendimento matematico e quello linguistico definendo la competenza matematica come mathematical literacy, altresì detta numeracy. Questo approccio è stato sposato dall'OCSE Pisa che nel suo framework definisce come la competenza matematica sia "l'abilità individuale: di identificare il ruolo che la matematica gioca nel mondo, di operare valutazioni fondate, di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione" (OECD, 2004, p. 24). Ancora una volta la competenza matematica si lega indissolubilmente alla cittadinanza, all'essere membro attivo di una società complessa, oltre a collaborare alla sua prosperità a prescindere dal ruolo ricoperto e dal fatto che esso sia più o meno legato alle conoscenze matematiche. Se queste sono le evidenze in merito alla definizione e al ruolo di numeracy, il prossimo paragrafo illustrerà i risultati di numerosi studi condotti sui livelli di numeracy ottenuti, con un focus specifico sulle scuole primarie italiane, per interessi di ricerca.

3.2.2 Risultati in matematica

Il presente progetto di ricerca trova rinnovata motivazione nei dati emersi dal rapporto Invalsi 2018, confermati dai risultati ottenuti anche nel 2019, da cui emerge in prima battuta come in seconda primaria non vi siano discrepanze significative tra le macroaree nazionali. Nel dettaglio esse sono: Nord Ovest (Valle d'Aosta, Piemonte, Liguria e Lombardia), Nord Est (Provincia Autonoma di Bolzano, Provincia Autonoma di Trento, Veneto, Friuli Venezia Giulia ed Emilia Romagna), Centro (Toscana, Umbria, Marche e Lazio), Sud (Abruzzo, Molise, Campania e Puglia) e Sud e Isole (Basilicata, Calabria, Sicilia e Sardegna). Nel confronto regionale in seconda primaria emergono come best performer regioni appartenenti a tutto il territorio italiano: Molise e Basilicata sia nel 2018 che nel 2019 e Umbria, Marche e Provincia Autonoma di Trento nel 2019. Al termine della scuola primaria abbiamo invece una discrepanza per cui Calabria, Sicilia e Sardegna risultano significativamente inferiori alla media nazionale. Tuttavia non è possibile ricondurre questo risultato alle macroaree, in quanto la Basilicata risulta top performer, seguita da Umbria e Marche.

Nella macroarea di riferimento per il presente progetto (Nord Est), sia nel 2018 che nel 2019 i risultati peggiori sono attribuiti proprio alla scuola primaria, con un miglioramento direttamente proporzionale alla crescita degli alunni. Dal grado 8 (terza classe della scuola secondaria di primo grado) al grado 13 (quinta classe della scuola secondaria di secondi grado) le regioni del Nord Est e del Nord Ovest ottengono risultati significativamente superiori alla media italiana, consolidando con l'avanzare dei gradi scolastici le differenze dalle altre macroaree, come confermato dalle rilevazioni OCSE Pisa (2018) in cui vi è un divario tra gli studenti delle regioni del Nord e quelle del Sud pari a un livello di competenza (come visibile nel grafico 3.3). Nonostante siano l'unica indagine annuale su scala nazionale, le prove nazionali Invalsi sono costruite su nuclei fondanti della matematica che non sono condivisi con chiarezza dalla comunità scientifica. Di qui è stata espressa l'esigenza di una maggior trasparenza nei documenti ufficiali che regolamentano contenuti e modalità di insegnamento (Ambrisi, 2015). Inoltre, uno studio ha evidenziato come in molte classi i dati riportati vengano manipolati dal personale scolastico, inficiando quindi l'attendibilità dei rapporti Invalsi (Battistin, De Nadai, & Vuri, 2017). Per queste ragioni non è possibile limitarsi a queste prove e occorre osservare i risultati ottenuti anche da rilevazioni internazionali. In particolare, le prove Timss (Trends in International Mathematics and Science Study) monitorano gli apprendimenti in matematica e scienze al quarto e all'ottavo grado in oltre 60 Paesi. Ai fini del presente studio saranno quindi discussi i risultati più recenti ottenuti nella quarta classe della scuola primaria. I risultati ottenuti dagli alunni italiani sono generalmente nella media (media Timss 500, media Italia 507), ma se si scorpora il dato si osserva come il punto di forza dei nostri studenti risieda nel dominio del numero, mentre il numero

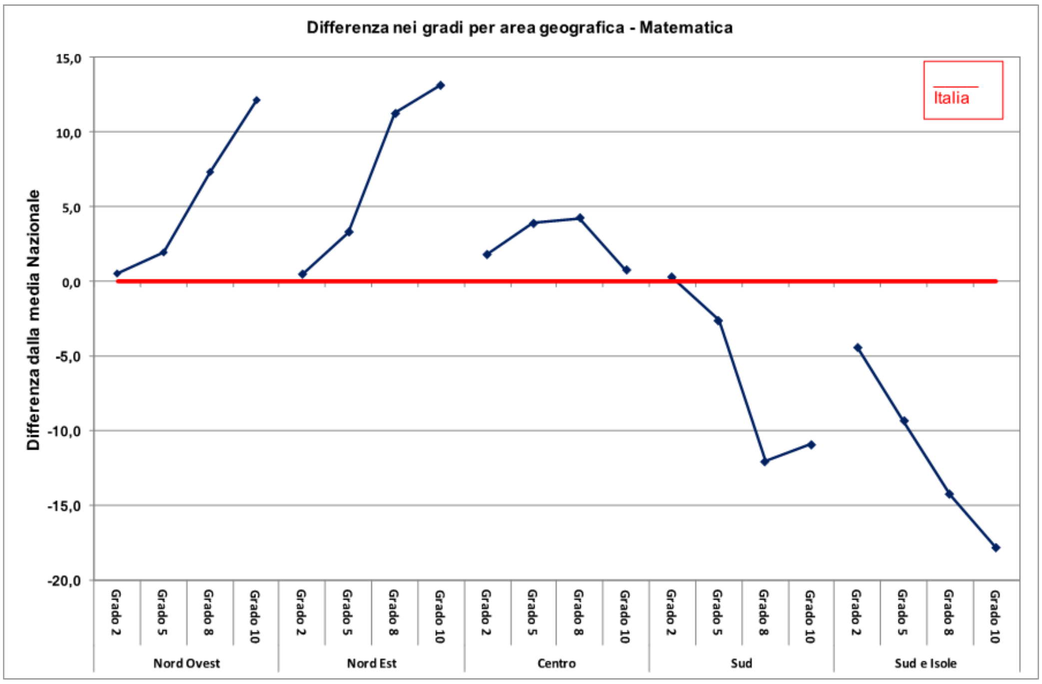


Figura 3.3: Risultati ottenuti in matematica nei diversi ordini e gradi, per ciascuna macroarea (Invalsi, 2018).

di risposte corrette in geometria e rappresentazione dei dati risulta, seppur lievemente, inferiore alla media, come visibile nella tabella 3.1 (Timss, 2015).

Questi risultati sono coerenti con quelli internazionali: i vari Paesi, pur presentando una situazione eterogenea in termini di punti di forza e di sviluppo, hanno mostrato il maggior numero di risposte corrette nel dominio del numero. L'indagine Timss indaga inoltre la distribuzione degli studenti in benchmark, o livelli di rendimento, definiti come avanzato, alto, intermedio e basso. Al livello basso, gli alunni conoscono e riescono ad applicare solo conoscenze matematiche fondamentali (ad esempio sanno utilizzare numeri entro le migliaia e moltiplicare numeri a una cifra). A quello intermedio sanno utilizzare un sapere limitato a situazioni facilmente leggibili, pur conoscendo i numeri interi, riuscendo a leggere grafici e tabelle, identificare figure geometriche con proprietà semplici. Nel livello alto si posizionano invece quanti sono in grado di risolvere problemi utilizzando conoscenze che spaziano dall'ambito numerico, a quello geometrico, all'interpretazione

Punteggio medio nella scala totale	Numero	*89 items*	Figure geometriche e misure	*56 items*	Rappresentazione dei dati	*24 items*
	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala totale	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala totale	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala totale
507 (2,6)	510 (2,4)	+3 (0,9)	503 (2,8)	-3 (1,0)	498 (2,9)	-9 (1,6)

Tabella 3.1: Risultati della quarta classe della scuola primaria in Italia. Tra parentesi errore standard (Timms, 2015).

MACROAREA	**Livello avanzato**	**Livello alto**	**Livello intermedio**	**Livello basso**
Nord-Est	5 (1,2)	35 (3,0)	77 (2,5)	96 (1,1)
Nord-Ovest	4 (1,0)	27 (2,8)	70 (2,8)	93 (1,2)
Centro	3 (1,0)	25 (3,6)	66 (4,1)	92 (2,3)
Sud	2 (0,9)	20 (2,4)	56 (3,7)	86 (2,6)
Sud e Isole	1 (0,7)	10 (1,9)	38 (3,7)	76 (3,5)
Italia	3 (0,5)	24 (1,3)	62 (1,7)	89 (1,0)

Tabella 3.2: Distribuzione degli studenti italiani della quarta classe della scuola primaria in benchmark. Tra parentesi errore standard (Timms, 2015).

di grafici e tabelle. L'ultimo livello, quello avanzato, comprende tutti quei bambini capaci di sfruttare la loro conoscenza per risolvere situazioni anche complesse, che richiedono vari passaggi, ma soprattutto che sanno illustrare il ragionamento seguito. In Italia la distribuzione percentuale nei benchmark appare eterogenea (tabella 3.2):

Si consideri che gli studenti di livello avanzato sono inclusi anche nei livelli precedenti e che la percentuale esclusa nel livello basso indica alunni che non raggiungono nemmeno una competenza di livello minimo.

Le differenze riscontrate sia dalle rilevazioni nazionali che da quelle internazionali riportano una discrepanza tra le regioni del Nord e quelle del Sud. Le ragioni paiono essere riconducibili all'ambiente familiare, in quanto l'ambiente socio-economico e le risorse delle famiglie sono in media minori, e a quello scolastico, in primo luogo in termini di qualità e quantità di infrastrutture a disposizione di ciascun alunno (Borgna &Struffolino, 2017). Alla luce della rilevanza della numeracy per la cittadinanza, i dati ottenuti mostrano in ogni caso come gli alunni che studiano nelle scuole di tutt'Italia non siano equipaggiati a sufficienza, nonostante le ricerche in Didattica della Matematica abbiano ampiamente indicato quali siano gli indicatori di una buona didattica. Una delle motivazioni per la distribuzione nei benchmark degli studenti italiani può essere tuttavia individuata non tanto nelle prassi di insegnamento, ma piuttosto nel fatto che in Italia le classi siano inclusive, per cui diversi bisogni educativi, anche speciali, possono coesistere. È pertanto utile proseguire con un approfondimento sulle difficoltà legate alla matematica, sia in termini di disturbi specifici dell'apprendimento, sia per quanto riguarda la relazione educativa.

3.2.3 Discalculia

La discalculia è stata definita sia come un disordine dello sviluppo neurologico che come un *disturbo specifico dell'apprendimento* (DSA), in ogni caso essa influenza gli apprendimenti matematici per l'intera durata della vita di una persona (Benedicto-López & Rodriguez-Cuadrado, 2019; Cicchini, Anobile & Burr, 2019). Ai fini scientifici della seguente tesi, di natura pedagogica, la discalculia sarà comunque considerata prevalentemente in quanto DSA. In particolare, la legge 170 con cui essa è stata riconosciuta assieme a dislessia, disgrafia e disortografia in tutto il territorio italiano, risale al 2010, ed è stata inserita nel DSM V nel 2013 (American Psychiatric Association, 2013), quindi di recente.

I DSA hanno un forte impatto sulla vita quotidiana di chi ne è affetto, ma sono limitati a uno specifico ambito, nel caso della discalculia a quello matematico. Per poter essere riconosciuto come discalculico, il bambino non deve presentare patologie neurologiche o deficit sensoriali, e dimostrare capacità cognitive adeguate. Non vi è tuttavia univocità nella comunità scientifica riguardo l'epidemiologia della discalculia: le stime vanno dal 3 al 7%, con un tasso di comorbidità con altri DSA pari circa al 10% (Moll, Landerl, Snowling, & Schulte-Koerne, 2019; Morsanyi, van Bers, McCormack, & McGourty, 2018), ma ulteriori studi sono auspicati per distinguere con maggior precisione il disturbo dalle difficoltà d'apprendimento (Peard, 2010). In aggiunta, il fatto che la diagnosi di discalculia non possa avvenire prima della terza classe della scuola primaria comporta un serio ritardo nell'attivazione di percorsi formativi personalizzati o individualizzati. Senza contare la complessità delle diagnosi data dalla variabilità della discalculia stessa, dal suo non essere legata a uno specifico gene ma piuttosto a varianti genetiche multiple, dall'utilizzo di diversi test anche solo nei confini nazionali, che sono somministrati da varie figure professionali e in diversi momenti dello sviluppo del bambino. Tutto ciò implica un'elevata variabilità tra i bambini con una certificazione di discalculia, e allo stesso tempo lascia spazio a una zona grigia in cui si trovano tutti quegli alunni con difficoltà matematiche che non sono tuttavia istituzionalmente riconosciute (Peters & Ansari, 2019).

Nonostante il disturbo sia giuridicamente riconosciuto come *discalculia*, vari studi hanno infatti evidenziato le molteplici espressioni con cui essa si può manifestare. In primo luogo, il modello di Butterworth prevede un core deficit nell'elaborazione di quantità, in altre parole i numeri e le numerosità in generale risultano irrilevanti per i discalculici (Butterworth, Varma, & Laurillard, 2011). Attraverso lo studio dei modelli dei processi cognitivi implicati, la discalculia sembra essere infatti correlata a un sistema del senso del numero compromesso (Piazza et al., 2010). Di conseguenza, gli individui affetti da discalculia ottengono prestazioni peggiori sia nei confronti tra quantità simboliche, che tra quelle non simboliche, dipendendo esse fortemente dal senso del numero (Castaldi, Mirassou, Dehaene, Piazza e Eger, 2018). In casi estremi potrebbero non essere in grado di svolgere questi compiti, risultando ciechi al numero, ossia incapaci di estrapolare qualsiasi informazione numerica dalla realtà in cui si trovano immersi (Butterworth, 2011). La discalculia sarebbe dunque l'espressione fenotipica di un disordine a livello neurologico, con una componente genetica, e non la conseguenza di un deficit in altre abilità cognitive (Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004). Anche la discalculia di tipo procedurale segue questo assunto. Essa è legata sia al core deficit del senso del numero (per cui i processi lessicali e sintattici, legati quindi essenzialmente alla codifica dei numeri e alla notazione posizionale, sono compromessi), sia al sistema del calcolo, con difficoltà nel richiamo dei fatti aritmetici e/o alla memorizzazione e all'applicazione di procedure di calcolo (Butterworth, 2011).

Secondo il modello del triplo codice di Dehaene (1992), la numeracy si fonderebbe poi sull'uso di tre codici, o formati, con cui le numerosità possono essere rappresentate: quello analogico (ooo), quello verbale/uditivo (due) e quello arabico visivo (2). Esisterebbero quindi dei circuiti deputati alla transcodifica di una determinata rappresentazione di quantità, che tuttavia non ne implica necessariamente la comprensione. Un bambino potrebbe quindi saper leggere il numero "4", senza riuscire a collegarlo alla quantità corrispondente di caramelle. Ciò avviene perché, come visto nel paragrafo dedicato alla numeracy, le abilità numeriche si fondano su start up neurali che non sono destinate unicamente a compiti di natura numerica. Di conseguenza, un individuo con discalculia potrebbe utilizzare questi circuiti per compiti differenti, potenziandoli, sfruttandoli poi anche per compiti numerici ma senza riuscire a mettere in atto quelle abilità strettamente legate al compito matematico. Come visibile in figura, pur trovandosi tutte lungo il solco intraparietale (IPS), le aree attivate dai tre diversi codici sono distinte (figura 3.4): per questo motivo è possibile che manchi il collegamento tra di esse (Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003).

Pur sottolineando aspetti differenti della discalculia, entrambi i modelli confermano l'importanza della stimolazione del sistema del senso del numero sin dai primi anni di scolarizzazione, se non già dalle prime fasi di vita. Ciononostante, le proposte educative personalizzate o individualizzate alla scuola primaria e alla scuola dell'infanzia sono ancora scarse (Dowker, 2017; Kermani, 2017; Wang, Libertus e Feigenson, 2018). L'attuale approccio adottato nella maggior parte delle lezioni inclusive in Italia, infatti, non

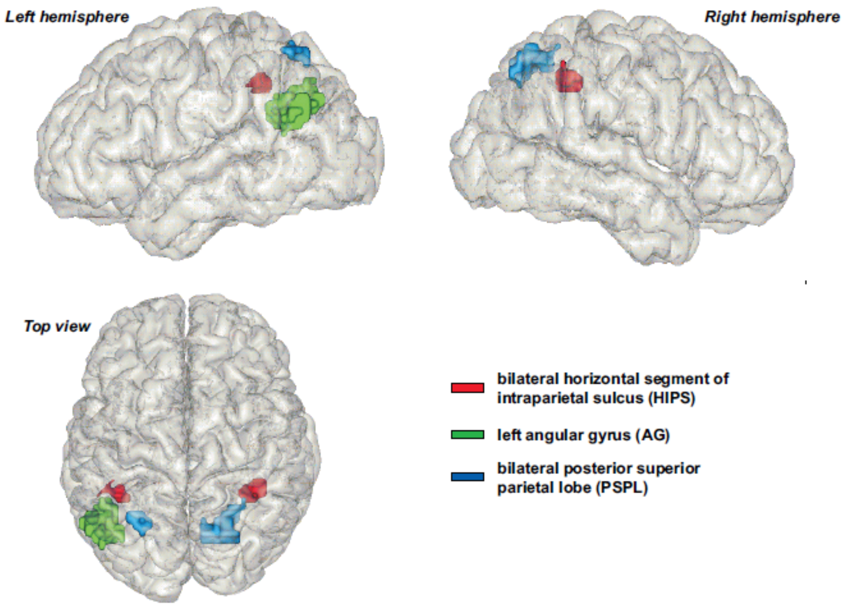


Figura 3.4: Rappresentazione anatomica dei correlati neurali del modello del triplo codice. In blu i circuiti neurali attivati dal formato arabico-visivo, in verde da quello verbale-uditivo, in rosso da quello analogico (Dehaene, et al., 2003, p. 493).

sta assicurando a tutti gli studenti di raggiungere competenze di base come la numerazione, con inevitabili conseguenze sulla loro futura qualità della vita (Butterworth, 2017; Invalsi, 2018; 2019; Mullis, Martin, Foy, & Hooper, 2016; OECD Pisa, 2018). Alcuni studi sono giunti a ipotizzare una correlazione tra l'incidenza della discalculia e un insegnamento della matematica non funzionale al suo apprendimento (Gaidoschik, 2019b). Certamente, come accade nel sistema scolastico italiano, privo di classi o scuole speciali, la coesistenza di molteplici bisogni educativi all'interno della stessa classe porta ad un conseguente elevato livello di complessità del processo di insegnamento-apprendimento (Spadafora, 2018). Tuttavia, questa complessità non è stata finora affrontata in modo efficace, delegando qualsiasi responsabilità all'insegnante di sostegno, pur essendo stato dimostrato come le classi in cui gli insegnanti disciplinari e di sostegno collaborano attivamente siano quelle con i maggiori benefici per ciascuno studente (Ianes, 2015). Inoltre, gli studi sull'approccio inclusivo hanno precisato come gli insegnanti che hanno adottato la personalizzazione degli apprendimenti tendano a sostenere ogni studente, proponendo materiali, processi, tempi e contenuti ad hoc, potenziandone l'apprendimento (La Marca, 2005; Zanniello, 2018). Nonostante solo i processi di insegnamento-apprendimento personalizzati o individualizzati siano quindi efficaci in classi con esigenze di apprendimento eterogenee (Montanari, 2019), essi sono ancora rari: il numero di programmi a sostegno delle abilità numeriche nell'infanzia è aumentato dopo il 2005, ma si tratta di interventi perlopiù su scala ridotta, oltre che limitati a specifiche scuole o istituti (Dowker, 2017). Esistono infatti programmi di intervento atti ad applicare in classe contenuti basati su teorie sviluppate in campi neuroscientifici, cognitivi e della formazione, ma essi sono tutt'oggi sporadici (Kroeger, Brown, & O'Brien, 2012). Inoltre, è stato evidenziato come i finanziamenti destinati a studi inerenti alla discalculia siano di molto inferiori a quelli destinati alla dislessia, e tra le conseguenze vi sia una ridotta conoscenza di questo disturbo sia da parte degli insegnanti che dei genitori (Butterworth & Kovas, 2013).

In conclusione, pur non trattandosi di uno studio afferente a pedagogia dell'inclusione, questo paragrafo risulta imprescindibile in quanto l'approccio della ricerca, in linea con quello adottato dalla scuola italiana, è inclusivo e pertanto tenere conto delle evidenze raccolte in merito a discalculia e difficoltà in matematica permette di comprendere con maggior facilità le scelte operate nel corso della sperimentazione.

3.2.4 La relazione educativa

L'interesse per le differenze di genere in matematica nacque negli anni '50 del secolo scorso, quando si è cercato di capire perché le discipline scientifiche sembravano attrarre più studenti che studentesse, concentrandosi sulle differenze tra i generi emerse dai risultati ottenuti e dagli interessi espressi lungo il percorso scolastico. Le numerose ricerche condotte da allora hanno dimostrato come le potenzialità siano equivalenti nei due generi, scartando dunque l'ipotesi di una disuguaglianza biologica e dando adito a nuovi interrogativi. L'attenzione si è quindi spostata da una questione biologica ad attitudini, percezioni e interessi nei confronti della matematica, in altre parole all'influenza data da stereotipi di genere. In particolare, si è ipotizzata l'esistenza di un circolo vizioso all'interno di differenti contesti di apprendimento: aspettative e attribuzioni convenzionali e immutabili da parte di genitori e insegnanti condizionerebbero l'acquisizione di competenze, con conseguenti discrepanze nei livelli raggiunti da alunni e alunne, come ravvisabile dagli esiti dell'indagine Ocse Pisa, per cui il vantaggio maschile pare accomunare studenti di tutto il mondo. Gli stessi risultati ottenuti dalle rilevazioni confermerebbero aspettative stereotipate, rinforzando la falsa idea di un'innata differenza di genere (Cheema, 2017; Hutchison, Lyons, & Ansari, 2017).

Negli anni '70 si ipotizzò che una delle conseguenze di questo fenomeno fosse rappresentata dall'ansia matematica, che ha di fatto una maggiore prevalenza nelle studentesse, ostacolando i loro risultati in termini scientifici. Fu proprio in quegli anni che venne sviluppata la scala di valutazione dell'ansia in matematica (Richardson & Suinn, 1972), ma nonostante ciò, ancora nei decenni successivi in diversi ambienti educativi persisteva l'idea che la matematica fosse destinata a pochi eletti, in particolare maschi, e che l'incapacità di ottenere risultati soddisfacenti nella maggior parte delle alunne era dovuta ad attitudini inadatte, pigrizia o direttamente al loro genere.

In questa seconda fase della ricerca sul divario di genere, sono state ottenute ulteriori evidenze a sostegno della tesi per cui il genere femminile è direttamente correlato con l'ansia per la matematica, con conseguenti ripercussioni negative sulla motivazione e sui livelli di competenza ottenuti dalle studentesse di tutti i gradi e ordini scolastici (Skagerlund, Östergren, Västfjäll, & Träff, 2019). L'ansia matematica, definita come uno stato di disagio ed emozioni negative durante l'esecuzione di compiti matematici (Ma & Xu, 2004), differisce dall'ansia da test per essere vissuta non solo durante una valutazione e per non essere strettamente correlata alla preoccupazione relativa ai risultati ottenuti. Ad ogni modo, sia l'ansia per la matematica che quella da test non possono essere differenziate dall'ansia generale fino alla scuola secondaria di primo grado: per questo motivo i fattori protettivi durante gli anni della scuola dell'infanzia e primaria consistono generalmente in alti livelli di autostima, autoefficacia e resilienza (Mammarella, Donolato, Caviola, & Giofrè, 2018), mentre le attribuzioni stereotipate di genitori e insegnanti, ma anche la pressione esercitata durante le lezioni, rappresentano un fattore di rischio (Rubinsten, Marciano, Levy, & Cohen, 2018). La pressione sembra di fatto agire come un fattore di stress, sovraccaricando così la memoria di lavoro (Soltanlou, Artemenko, Dresler, Fallgatter, Ehlis, & Nuerk, 2019): le situazioni stressanti non sono favorevoli all'apprendimento, ma anzi hanno spesso esito nello spostamento dell'attenzione sul risultato piuttosto che sul processo da parte degli studenti, portandoli a scegliere strategie non ottimali, e influenzando anche la loro motivazione (Caviola, Carey, Mammarella, & Szucs, 2017). In aggiunta, secondo la *teoria reciproca* dell'ansia in matematica, essa può derivare da una situazione di scarso rendimento in matematica, in specifici casi a causa di una predisposizione genetica (Wang et al., 2014), ma è il mantenimento di questo tipo di situazione che alimenta l'ansia matematica, causando un circolo vizioso per cui l'ansia determina un abbassamento dei risultati ottenuti e viceversa (Carey, Hill, Devine, & Szucs, 2016). La persistenza di questa situazione può portare a una graduale alterazione della struttura neurale, in primo luogo limitando le capacità attentive e le funzioni inibitorie (esaurendo le risorse della memoria di lavoro), con conseguenti prestazioni inferiori in compiti matematici complessi, in secondo luogo con una riduzione del volume della sostanza grigia nel solco intraparietale, nella lingula e nella corteccia del cuneo, porzioni cruciali per le funzioni matematiche come l'elaborazione dei numeri e il calcolo (Hartwright et al., 2018), e in terzo luogo cambiando la struttura dell'amigdala destra, che elabora le emozioni negative (Kucian, McCaskey, O'Gorman Tuura, & von Aster, 2018). Il paradigma dell'ansia, ossia la comparsa di una condizione ansiosa in seguito a uno stimolo incondizionato negativo, era tuttavia stato definito già nel quadro teorico comportamentista. Le risposte a uno stimolo negativo ripetuto si distinguono secondo questa teoria in fuga o evitamento: allontanarsi dallo stimolo, oppure evitarne la comparsa. Questo paradigma ha spiegato il motivo per cui si instaurano comportamenti adattivi che, nella maggior parte dei casi permettono all'individuo di superare le difficoltà, ma nello specifico caso dell'ansia matematica producono effetti e reazioni disadattivi. Il soggetto, pur di evitare conseguenze spiacevoli, si sottrarrebbe infatti alla situazione ansiogena: nel nostro caso lo studente eviterebbe di frequentare l'ora di matematica. Evitare di affrontare l'origine dello stimolo impedisce al bambino di tornare ad approcciarsi alla disciplina serenamente, e a lungo andare questo meccanismo può condurre all'impotenza appresa, per cui l'alunno eviterà qualunque proposta educativa riferita alla matematica pensando a priori di non essere all'altezza (Magro & Muffolini, 2011).

In aggiunta, in classe avvengono processi di socializzazione che concorrono alla costruzione dell'identità personale e sociale del bambino: l'individuo, entrando in contatto con la realtà esterna, la modifica e ne viene modificato. Durante l'infanzia questo processo avviene in due contesti principali: la famiglia e la scuola (Frabboni & Pinto Minerva, 2003). Un fattore di rischio è pertanto, come anticipato, rappresentato dalle attribuzioni di genitori e insegnanti: il loro duplice ruolo educativo e formativo ha un'influenza significativa su credenze e atteggiamenti sviluppati da bambini e bambine nei confronti della matematica (Soni & Kumari, 2017). È stato infatti rilevato come insegnanti della scuola primaria ansiose influenzino le alunne, e non gli alunni (a causa di una maggiore identificazione veicolata dal genere), aumentando i loro livelli di ansia nei confronti della disciplina (Beilock, Gunderson, Ramirez, & Levine, 2010). Una volta interiorizzate le basse aspettative ed elaborate autoattribuzioni stereotipate, le alunne ne saranno fortemente influenzate, con gravi ripercussioni sulla qualità degli apprendimenti (Castellana, 2018). Queste scoperte sono particolarmente rilevanti nella nostra penisola, dove la componente femminile nella docenza primaria supera il 95% (OECD, 2017): non è infatti da escludere una relazione tra questa percentuale il terz'ultimo posto occupato dall'Italia per parità di genere negli apprendimenti matematici dell'intera area OCSE. Oltre a ciò va considerato come nell'area OCSE il tradizionale divario di genere presente in ogni ambito d'apprendimento si sia da alcuni anni capovolto a favore delle alunne: esse ottengono risultati migliori in ogni disciplina, eccetto matematica (Contini, Di Tommaso, & Mendolia, 2017). Dalla rilevazione OCSE Pisa del 2016 emerge infatti non solo come il 23,4% degli studenti italiani non raggiunga i livelli minimi di competenza, ma anche come questa percentuale sia rappresentata prevalentemente da alunne, dati confermati anche dalle rilevazioni successive (OECD Pisa, 2018) e dai risultati ottenuti con il test Invalsi (2018). La maggioranza dei top performer risulta inoltre rappresentata da studenti di genere maschile, con un divario di genere che quindi permea ogni livello di competenza e che non mostra cambiamenti significativi nella penisola dal 2009 (OECD Pisa, 2018).

Nonostante le evidenze ottenute, ad oggi la ricerca inerente l'ansia e il gap di genere in matematica non ha ancora fornito un'esaustiva illustrazione del fenomeno. La maggior parte dei dati relativi ai livelli ottenuti da alunni e alunne, derivando da indagini nazionali e internazionali, si riferiscono infatti a competenze matematiche, quindi apprendimenti con un elevato grado di complessità, rendendo difficile definire se ansia, aspettative e attribuzioni agiscano sulle abilità di base, influenzando di conseguenza gli apprendimenti successivi, o se invece le abilità di base vengano apprese a prescindere e il condizionamento agisca solo sugli apprendimenti successivi. Le rare evidenze ottenute in merito suggeriscono come le abilità di base non presentino influenze di genere, se non dovute a una differenza neurologica per cui le bambine sviluppano più tardi dei compagni le abilità visuo-spaziali (ciò spiegherebbe la discrepanza di genere riscontrata nelle prime fasi dell'evoluzione della linea numerica mentale). Tuttavia, da un lato queste ricerche sono state condotte in Paesi con differenze di genere di gran lunga inferiori rispetto al nostro, dall'altro si sono focalizzate sulla scuola primaria (Hutchison et al., 2017).

Dal punto di vista didattico, è tuttora credenza comune che la matematica sia difficile e che esista una élite, coloro con il pallino della matematica, destinata a comprenderla e utilizzarla. Ciò pare limitare le

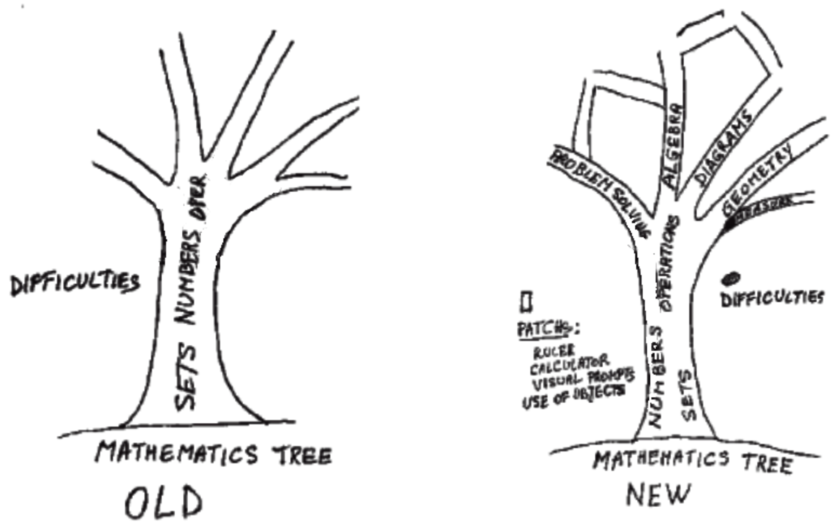


Figura 3.5: Monari Martinez (2002).

proposte didattiche che intendano la matematica per tutti e per ciascuno (Di Martino, & Gregorio, 2019). Monari Martinez (2002) ha graficamente rappresentato il cambio di paradigma che deve ancora avvenire nelle aule scolastiche: un nuovo albero della matematica deve trovare radici nell'azione didattica, soprattutto di base (figura 3.5).

In conclusione, nell'ultimo ventennio la ricerca in Didattica della Matematica (e delle STEM, *Science, Technology, Engineering and Mathematics*, in generale) ha dimostrato come le competenze aritmetiche siano imprescindibili per essere cittadini attivi nella società, tecnologica e digitale, in cui viviamo (Barelli, Branchetti, Tasquier, Albertazzi, & Levrini, 2018; Butterworth, 2005; Withnall, 1995). Risulta pertanto fondamentale per il futuro del nostro Paese garantire non solo parità di genere nell'apprendimento matematico, ma anche un modello inclusivo maggiormente efficace per l'acquisizione di un livello adeguato di numeracy da parte di tutti e di ciascuno.

4 | Cognizione numerica e didattica

Con quest'ultimo capitolo si conclude l'inquadramento teorico dello studio. Risulta quindi necessario delineare l'approccio adottato per la sperimentazione prima di procedere con la descrizione del metodo: quello della scienza *mente, cervello e didattica*, che sarà innanzitutto definita e descritta. Nel primo paragrafo si darà pertanto maggior spazio all'illustrazione dei riferimenti scientifici, mentre nel secondo saranno presentate le tre tecniche didattiche adottate nel corso della sperimentazione, che appunto derivano da assunti espressi dal recente settore che unisce mente, cervello e didattica. In particolare sarà dunque posto un focus sulle relazioni tra questo settore, la cognizione numerica e la didattica della matematica.

4.1 Mente, cervello e didattica della matematica

Il presente paragrafo è dedicato alla definizione della scienza nota in inglese come *mind, brain and education*, o *educational neuroscience*, proponendone una traduzione adattata per la lingua italiana. Questa sezione trova motivazione nella giovane età della scienza stessa, che appunto non ha ancora un corrispettivo univoco in lingua italiana (Rivoltella, 2012).

4.1.1 La scienza "mente, cervello e didattica"

Negli ultimi decenni sono stati manifestati comuni interessi di ricerca da tre distinte scienze: la psicologia, le neuroscienze e le scienze della formazione. Questa commistione ha portato, col tempo, a uno scambio reciproco di metodi e alla nascita di centri di ricerca misti, con studiosi afferenti alle tre diverse scienze (Tokuhama-Espinosa, 2011). Questa transdisciplinarietà pare essere nata in risposta alla complessità delle domande di ricerca, che non poteva più essere soddisfatta mantenendo la settorializzazione delle scienze, caratteristica propria di ogni ambito disciplinare (Frabboni, et al., 2003). Appare infatti oggi necessario un nuovo paradigma capace di affrontare le problematiche formative emergenti (Margiotta, 2011). In altre parole è di assoluta rilevanza coniugare le evidenze neuroscientifiche e la prassi didattica, guardando al cervello per comprendere la mente (Margiotta, 2007). Questa commistione ha dato dunque vita a una nuova scienza, definita in inglese come *mind, brain, and education* (MBE), che in italiano non ha ancora una traduzione univoca e condivisa (Rivoltella, 2012).

In primo luogo, l'oggetto di studio di MBE è il processo di insegnamento-apprendimento, osservato da molteplici prospettive. Se il suo scopo ultimo è quello di sviluppare tecniche didattiche più efficaci di quelle esistenti, alcuni suoi esponenti la definiscono come la scienza che utilizza evidenze empiriche per confermare (e promuovere) le migliori pratiche didattiche e pedagogiche (Tokuhama-Espinosa, 2011). Uno dei suoi fondatori, Kurt Fischer, identificò tra gli altri l'obiettivo di creare solide fondamenta empiriche per la pratica didattica, consentendo di discernere i fattori capaci di promuovere processi di insegnamento-apprendimento efficaci (Fischer, 2009). Questo accento sulla didattica, più che sull'educazione, sulla pedagogia o su altri aspetti della formazione, suggerisce una traduzione di MBE in italiano come *mente, cervello e didattica* (MCD). In questo modo non si considerano traduzioni quali *neurodidattica*, o *neuroscienze educative*, che escludono l'ambito psicologico (come visibile in figura 4.1). Tuttavia, come rappresentato, le tre discipline di origine della nuova scienza comprendono la pedagogia, di cui si mantengono alcuni interessi di ricerca anche in MCD (Halloun, 2016).

Le peculiarità di MCD sono comuni alla didattica generale e disciplinare, come visto nel primo e nel secondo capitolo, ma si differenzia dalle altre scienze educative per la sua attenzione alla pratica d'aula. Ricerca e

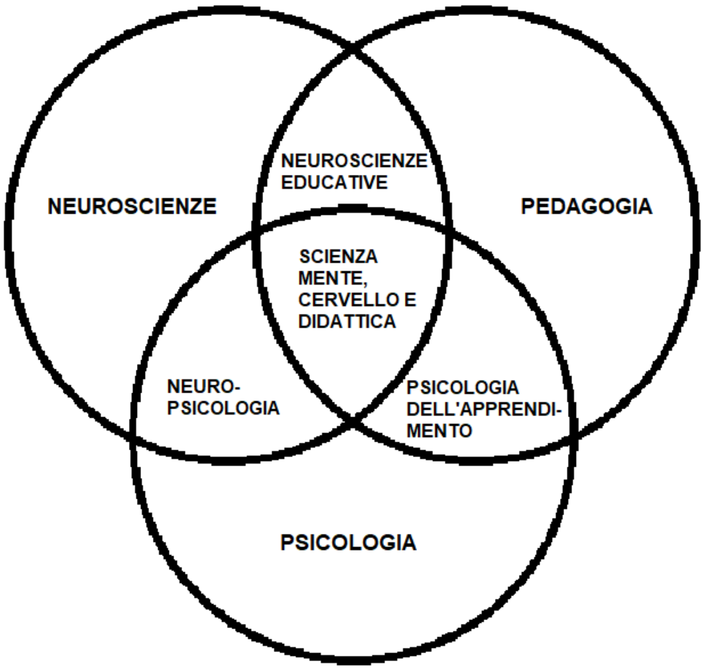


Figura 4.1: Schematizzazione degli ambiti disciplinari legati alla scienza mente, cervello e didattica (adattamento e traduzione da Tokuhama-Espinosa, 2011).

applicazioni didattiche hanno infatti lo stesso peso negli studi che ricadono all'interno di MCD in ogni fase di ricerca, dalla definizione della domanda di ricerca alla condivisione dei risultati (Tokuhama-Espinosa, 2011). Sarebbe ancora fuorviante parlare di *mente, cervello e apprendimento*, sia perché l'apprendimento è un processo cognitivo (quindi all'interno del dominio psicologico) sia perché non considera l'attenzione che MCD ripone sull'insegnamento, dal momento che "we know a little of what goes on in the brain when we learn, but hardly anything about what goes on in the brain when we teach" (Blakemore & Frith, 2008, p. 118) e MCD intende proprio indagare questo tipo di processi.

Durante questi primi anni di vita della scienza, uno dei maggiori problemi riscontrati è sorto dal fatto che non esiste ancora un linguaggio condiviso da ciascuna delle scienze che si riferiscono a MCD e questo implica che da un lato non vi sia una perfetta corrispondenza biunivoca tra referenti e contenuti, dall'altro che le evidenze ottenute da studiosi appartenenti a uno specifico settore siano in larga misura sconosciute agli studiosi afferenti agli altri (Geake, 2016). Tra le soluzioni nate in risposta a quest'ostacolo vi sono quelle a breve termine, quale quella di fornire dei glossari a corredo degli articoli, in modo da rendere comprensibile anche ai lettori delle altre discipline le pubblicazioni pertinenti e rilevanti (si veda ad esempio Grabner, Ansari, De Smedt, & Hannula, 2010). Altre a lungo termine comportano un impegno maggiore. La fondazione della International Mind, Brain and Education Society (IMBES), nata nel 2004, e dell'European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) nel 2009 perseguono questo secondo obiettivo. Sono inoltre nate le prime riviste del settore, quali "Mind, Brain, and Education", "Trends in Neuroscience and Education", ed "Educational Neuroscience", oltre a centri di ricerca transdisciplinari che rispondano alle caratteristiche richieste da MCD (Thomas, Ansari & Knowland, 2019). Ad oggi quelli ufficialmente riconosciuti sono 166 in tutto il mondo, di cui due in Italia: il Language, Cognition and Development Laboratory (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati di Trieste), e il Cognitive and Educational Sciences Lab (Libera Università di Bolzano).

Tuttavia, non si potrà parlare di reale transdisciplinarietà finché non saranno stati rimossi gli ostacoli non solo di tipo linguistico-concettuale, ma soprattutto di natura metodologica (Han, Soylu & Anchan, 2019). Esistono infatti tutt'oggi profonde differenze tra le prassi appartenenti ai diversi professionisti: la maggioranza degli insegnanti non possiede le necessarie competenze per contribuire e valutare la ricerca, mentre gran parte dei neuroscienziati non conosce sufficientemente la scuola per poter delineare e condurre ricerche che rispondano a reali necessità (Coldwell et al., 2017; Rose, Daley, & Rose, 2011). Per queste ragioni già nel 1997 Bruer parlava di "a bridge too far" (traducibile con "un passo azzardato") riferendosi alla nascente MCD, ciononostante molti sono stati gli studiosi che nel corso di questi anni hanno compiuto sforzi per ridurre le distanze e promuovere la transdisciplinarietà, sostenendo come essa fosse una valida risposta alla complessità delle domande di ricerca nascenti, sottolineando come ciascuna delle tre scienze presa singolarmente risultasse, in alcuni casi, insufficiente (Howard-Jones et al., 2016; Kelleher & Whitman, 2018; Thomas, 2019). Se quindi da un lato è lecito affermare che questa scienza non abbia ancora raggiunto piena maturità, dall'altra vari studi ne hanno evidenziato l'urgente necessità. Tra questi, numerose ricerche condotte in diversi continenti hanno fatto emergere un fenomeno causato dalla mancanza di formazione specifica in MCD da parte degli insegnanti: la diffusione di neuromiti (Macdonald, Germine, Anderson, Christodoulou, McGrath, 2017). Essi sono stati definiti come un'interpretazione errata o un'ipersemplificazione di contenuti relativi al cervello e al suo funzionamento, applicati a contesti differenti dalle neuroscienze, in prima istanza all'educazione (OECD, 2002). I processi di apprendimento e di insegnamento sono di una tale complessità che ogni tentativo di semplificazione risulta di fatto superficiale o errato. Per questa ragione i neuromiti, con la loro immediatezza, nascondono da un lato delle ipersemplificazioni concettuali, dall'altro si fondano su idee scientificamente povere o valide in passato ma ora dimostrate come false. La complessità insita sia nella didattica che nella ricerca implica inoltre una continua messa in discussione ma, se da un lato la natura stessa della scienza porta ad approfondimenti, revisioni, rivisitazioni delle teorie, dall'altro occorre delimitare ciò che è emerso in seguito a rigorosi studi scientifici e ciò che invece è frutto di credenze, come avviene appunto per i neuromiti. Gli studi sulla loro diffusione in ambito scolastico sottolineano infatti come una prospettiva evidence-based sia necessaria al fine di evitarne la propagazione, con conseguenze infauste per l'apprendimento (Holmes, 2016). In aggiunta, vari studi hanno riscontrato un alto interesse da parte dei docenti per contenuti neuroscientifici, a cui tuttavia non fa seguito una formazione formale, sia essa in ingresso o continua. L'apprendimento informale e non formale pare quindi essere foriero di contenuti distorti che, se applicati alla didattica, potrebbero avere effetti nocivi (Ferrero, Garaizar, & Vadillo, 2016; Grospietsch & Mayer, 2020; McMahon, Yeh, & Etchells, 2019). In altre parole, essendo MCD una scienza ancora molto giovane, molte delle ricerche presentate negli articoli del settore non sono ancora conosciuti o direttamente applicabili in aula. Per compiere questo passaggio è necessaria una literacy da parte dei docenti che attualmente manca a livello globale, oltre a una conoscenza linguistica sufficiente a comprendere con efficacia testi scientifici, prevalentemente pubblicati in lingua inglese (Bruer, 2016; Ferrero, Garaizar, & Vadillo, 2016). In aggiunta, i risultati ottenuti, così come altri puramente inventati, hanno ampia diffusione sui media, rendendo impossibile agli insegnanti non adeguatamente formati distinguere tra evidenze e fake news (Papadatou-Pastou, Haliou, & Vlachos, 2017). Ciò ha portato alla diffusione di pratiche didattiche quali la Brain Gym, un programma basato su presupposti pseudoscientifici che prevede specifici esercizi da compiere in classe, capaci di attivare e/o collegare varie aree cerebrali, con la pretesa di potenziare l'apprendimento. Questo programma, presente in oltre 80 Paesi, oltre a non produrre alcun beneficio pedagogico, sottrae prezioso tempo all'apprendimento e richiede un impegno in termini economici da parte delle scuole (Kroeze, Hyatt & Lambert, 2016). Considerando in ultima istanza il fatto che la qualità dell'insegnamento è il fattore maggiormente determinante per la qualità dell'apprendimento, risulta urgente una formazione ad-hoc degli insegnanti per fornire loro adeguati strumenti didattici e formativi (Tokuhama-Espinosa, 2014).

In conclusione, al fine di evitare conseguenze avverse alla qualità dell'apprendimento, quale la diffusione di neuromiti, il primo imprescindibile passo da compiere è quello di stabilire una connessione bidirezionale tra le teorie dell'apprendimento basate su evidenze scientifiche e la pratica didattica. Tale relazione implica il superamento della disconnessione tra ciò che accade nei laboratori neuroscientifici e quanto invece avviene a scuola, e ciò è reso possibile solo attraverso la nuova figura del professionista in MCD, ruolo attualmente ricoperto solo parzialmente da neuroscienziati, psicologi, pedagogisti o insegnanti. Tale professionista dovrebbe essere in grado di selezionare gli studi di laboratorio applicabili e misurabili in classe, e allo stesso tempo di discriminare le pratiche didattiche non supportate da evidenze scientifiche. Ciò non implica una "biologizzazione" delle pratiche formative: i dati misurabili e scientifici non sono gli unici modi per valutare l'apprendimento degli studenti o la qualità degli insegnamenti. Si tratta piuttosto di incoraggiare gli insegnanti, che percepiscono se una proposta didattica sia efficace o meno grazie all'esperienza, a non respingere questo tipo di intuizione professionale, ma piuttosto a trovare modi per spiegarla su base empirica. Infine, i risultati scientifici in MCD non dovrebbero essere valutati non solo riferendosi alla qualità della ricerca stessa, ma anche in termini di qualità della domanda di ricerca (Tokuhama-Espinosa, 2011).

4.1.2 Mathematics educational neuroscience

La psicologia presenta per la prima volta il proprio contributo alle ricerche legate alla didattica della matematica nel corso dei primi anni del secolo scorso. I primi contatti tra le due discipline riguardano in larga misura l'infanzia: vengono elaborati i primi test per misurare l'intelligenza, in cui vengono inseriti materiali matematici, quali quelli per valutare il problem solving, ma anche la geometria. A partire da questo primo contatto, psicologi e didatti della matematica scoprono di avere interessi comuni, legati in primo luogo all'apprendimento dei concetti matematici (Millán Gasca, 2016). È infatti a cavallo tra l'800 e il '900 che la pedagogia, da oggetto di riflessione filosofica, assume un'identità scientifica e razionale, guardando a scienze quali la psicologia, ma anche ad esempio la genetica (Olivieri, 2011). Nonostante queste influenze, la didattica della matematica, come visto nel primo capitolo, si affida ancora oggi all'istinto, alla traduzione o all'esperienza del singolo insegnante. La commistione della didattica con la psicologia e le neuroscienze è quindi potenzialmente foriera di innovazione didattica, in quanto ha il fine, tra gli altri, di favorire una pratica d'aula fondata su solide evidenze e teorie (Devlin, 2010). La prospettiva di MCD, e in particolare della branca specificamente dedicata alla matematica, definita come *mathematics educational neuroscience* e nata solo di recente (Paoli, 2014), sposta di fatto il focus degli insegnanti di matematica da problemi generali (ad esempio, "ho un alunno con difficoltà in matematica") ad abilità specifiche, spesso alla base degli apprendimenti matematici, (ad esempio, "ho un alunno con difficoltà nel richiamo di fatti aritmetici, nel riconoscimento di quantità analogiche, nell'applicazione di formule, ecc."). Questa precisione sostiene un processo di insegnamento-apprendimento non solo consapevole e competente, ma anche maggiormente efficace in quanto permette di comprendere con chiarezza dove e come sia necessario intervenire. Ciò favorisce in seconda battuta sia l'apprendimento sia l'inclusione, dal momento che è possibile rispondere adeguatamente, grazie all'identificazione precisa del bisogno educativo (Gaidoschik, 2019b; Tokuhama-Espinosa, 2011).

La *mathematics educational neuroscience* (MEN) ha infatti avuto origine come mezzo atto a valutare e affinare le teorie dello sviluppo dell'abilità matematica, in particolare afferenti alla cognizione numerica, al fine di trarne le implicazioni che potessero apportare un miglioramento dell'insegnamento in classe (Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018). Uno degli interessi della MEN riguarda per questo l'equità degli apprendimenti, considerato l'impatto che il livello raggiunto nella competenza matematica ha a livello economico e professionale sulla futura vita degli studenti (Thomas, Ansari & Knowland, 2019). A riguardo, un recente studio che ha coinvolto un gruppo di bambini in età corrispondente alla scuola primaria e identificati come vulnerabili (Afgani emigrati in Iran, senza diritto all'istruzione, quindi impiegati come forza lavoro), ha mostrato risultati incoraggianti nell'applicazione di strategie educative basate su alcuni assunti neuroscientifici, psicologici e pedagogici. In particolare sono stati riscontrati miglioramenti significativi per quanto riguarda la classificazione delle loro informazioni e conoscenze, il richiamo di conoscenze in diverse situazioni, l'utilizzo del ragionamento logico e dell'argomentazione, oltre ad aver incentivato il coinvolgimento attivo da parte degli studenti, che presentavano livelli motivazionali iniziali molto bassi (Amiripour & Khodabandelou, 2019). Numerose ricerche in MEN riguardano poi bambini con discalculia o difficoltà matematiche, sfruttando le evidenze che la cognizione numerica ha reso disponibili negli ultimi anni al fine di promuovere modelli formativi realmente inclusivi (Grabner, Obersteiner, De Smedt, Vogel, von Aster, Leikin & Nuerk, 2016).

Tuttavia, se, come visto nel precedente paragrafo, il processo di meticciamento disciplinare è ostacolato da una mancanza di formazione specifica del personale scolastico, dall'altro lato nel nostro Paese alcuni didatti della matematica hanno preso forti posizioni in direzione contraria. D'Amore e Fandiño Pinilla nel 2018 si esprimevano così a riguardo (p. 249):

> "[...] sicuri come siamo della tesi che più volte abbiamo difeso, e cioè che la moderna Didattica della Matematica abbia incluso nella sua organizzazione attuale tutto quel che di pedagogia e psicologia poteva essere utile, come parte significativa dello sviluppo scientifico della nostra disciplina. Negli anni '80 alcuni di noi ricercatori, in genere matematici, ci siamo sforzati di studiare queste discipline appunto per catturarne e fare nostri i concetti, le idee, le creazioni culturali e scientifiche che apparivano necessarie alla Didattica della Matematica; a quei tempi si suggeriva, anche in contesto internazionale, a chi voleva occuparsi di Didattica della Matematica come ricercatore o come professionista (per esempio docente di scuola) di seguire corsi di queste due interessanti discipline (Fandiño Pinilla, 2003); ma, successivamente, questo non si è più ritenuto necessario, dopo che il percorso di inserimento delle idee significative e specifiche era stato compiuto."

I rischi di questa posizione comprendono in primo luogo il rendere vane ricerche in discipline differenti dalla didattica, rinunciando alla transdisciplinarietà auspicata dai pedagogisti (Frabboni, et al., 2003; Margiotta, 2007; Margiotta, 2011), in secondo luogo un aumento degli studenti con difficoltà in matematica causati da insegnanti non adeguatamente preparati, come suggerito da altri didatti della matematica (Gaidoschik, 2019b), infine un impoverimento scientifico a causa della perdita di metodi e strumenti di ricerca propri di scienze quali la psicologia e le neuroscienze (Howard-Jones et al., 2016). La Didattica della Matematica da un lato e le neuroscienze cognitive dall'altro, assieme alla psicologia, in una relazione transdisciplinare, possono infatti capitalizzare i reciproci lavori, aumentando la validità dei risultati e fornendo vicendevoli interpretazioni (Leikin, 2018).

Nonostante gli studi condotti negli ultimi vent'anni, e malgrado l'esponenziale crescita delle evidenze ottenute dalle neuroscienze cognitive e dalla psicologia a riguardo dell'apprendimento, le pratiche didattiche quotidianamente adottate in aula restano tuttavia distanti da quanto teorizzato. La

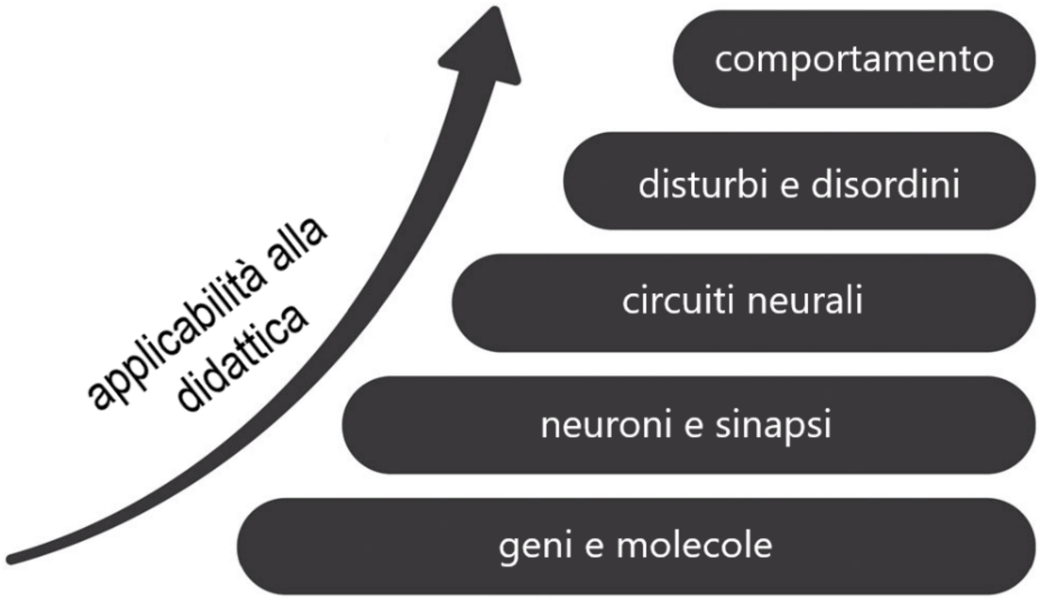


Figura 4.2: Livelli di applicabilità nella pratica didattica degli studi condotti nei vari ambiti (traduzione da Churches, Dommett, Devonshire, Hall, Higgins & Korin, 2020).

causa di ciò può essere ricondotta al fatto che le ricerche condotte nei vari ambiti siano ancora difficilmente applicabili nell'insegnamento (Churches, Dommett, Devonshire, Hall, Higgins & Korin, 2020), come schematizzato nella seguente figura (figura 4.2):

MEN vuole dunque offrire ai ricercatori nuovi approcci per comprendere lo sviluppo matematico, nonché la matematica stessa (Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018). Questo recente campo di ricerca ha invero le potenzialità per arricchire l'insegnamento matematico contribuendo alla comprensione dei processi cognitivi che soggiacciono ai diversi compiti matematici, fornendo spiegazioni alle radici del successo formativo o delle difficoltà nell'apprendimento matematico e promuovendo di conseguenza l'inclusività delle classi (Leikin, 2018). L'obiettivo più importante è di fatto quello di implementare sistemi formativi equi, che forniscano a tutti e ciascuno l'opportunità di raggiungere il loro miglior livello di competenza, attraverso un caleidoscopio di potenziali risultati formativi. Le ricerche che ricadono sotto l'ombrello di MEN evidenziano come sia imprescindibile la considerazione delle differenze individuali e in generale della diversità umana nella proposizione di percorsi formativi, tenendo conto anche di aspetti biologici, ad esempio considerando fattori genetici (Sokolowski & Ansari, 2018).

In conclusione, per una reale integrazione transdisciplinare, la collaborazione tra insegnanti, didatti della matematica, pedagogisti, neuroscienziati e psicologi è cruciale. Questa collaborazione dovrebbe a tal fine essere simmetrica per consentire un potenziamento reciproco. Ciò comporterebbe così benefici aggiuntivi, tra cui l'ulteriore sviluppo di ciascuno di questi campi di ricerca e l'implementazione dei risultati ottenuti nella pratica didattica, con un miglioramento della qualità dell'offerta formativa (Leikin, 2018).

4.2 Tecniche didattiche basate sulle neuroscienze

Lo scopo della presente ricerca consiste nello studio del processo di apprendimento-insegnamento di tre differenti tecniche didattiche, introdotte sperimentalmente in due differenti scuole della macroarea del Nord-Est Italia: spaced learning, inquiry based learning e learning by doing con l'utilizzo di manipulatives, confrontandole con le tecniche elaborate personalmente da ciascuno degli insegnanti partecipanti alla ricerca. La scelta delle tre tecniche è avvenuta tenendo conto di due principali fattori: la loro limitata diffusione nelle scuole primarie e la loro efficacia nell'apprendimento, come riportato in letteratura (Barnes, 1989; Delazer et al., 2003; Forman, 1989; Geary, 1993; INVALSI, 2018; Kyriacou & Goulding, 2006; Siegler, 1988; Supekar et al., 2013). Si è inoltre tenuta in considerazione la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (2008), secondo la quale la tecnica dello spaced learning rappresenta una situazione didattica (ossia quando le intenzioni proprie del sistema sapere-insegnante-alunno sono esplicitate), mentre le altre due tecniche si ricollegano a quelle che sono state definite come situazioni a-didattiche, in altre parole situazioni di insegnamento-apprendimento in cui il contratto didattico viene meno, spostando il focus sulla relazione tra apprendente e oggetto matematico. Possibili elementi di originalità della presente ricerca sono quindi costituiti dalla sperimentazione presso la scuola primaria dello spaced learning, finora studiato a livello secondario e terziario (Thomas, Ansari, & Knowland, 2019), ma anche dall'adozione di tecniche quali il learning by doing con l'utilizzo di manipulatives (non ancora sperimentato nel contesto geografico di riferimento, come riportato da Laski e colleghi nel 2015). La proposta dell'inquiry based learning trova infine fondamento in quanto da un lato è considerata di riferimento per il rinnovamento della didattica delle discipline scientifiche, dall'altro le evidenze riportate in letteratura ne denunciano la mancata diffusione (Bolte, Holbrook, & Rauch, 2012; Croce, 2017). In ultima istanza, si sottolinea come la ben nota teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (2008) non sia ancora stata oggetto di approfondito studio in relazione alle recenti evidenze ottenute a riguardo dell'impatto sull'apprendimento da parte dell'ansia per la matematica, illustrate nel capitolo precedente. Saranno ora esposti i principi teorici delle tecniche didattiche oggetto di studio nel presente progetto di ricerca, tenendo a mente come in pedagogia non possa esistere una tecnica più efficace delle altre, ma piuttosto ciascuna di esse trovi maggior risonanza a seconda di vari fattori (Tokuhama-Espinosa, 2011), tra cui la teoria dell'apprendimento adottata dall'insegnante.

4.2.1 Spaced learning

Lo spaced learning, o *apprendimento intervallato* (AI), è una tecnica didattica per cui si applica in contesto di apprendimento un pattern di memorizzazione a lungo termine elaborato da autori afferenti alla psicologia e alle neuroscienze (Mangione, Maeca, & Pettenati, 2016; Kelley & Whatson, 2013). La presente tecnica si è sviluppata in primo luogo a partire dalla teoria elaborata da Kandel e Siegelbaum (2014), sulla base di quanto studiato da Ebbinghaus (1885/1913), grazie allo studio dell'Aplysia, o lumaca di mare, mollusco scelto per il fatto di possedere un sistema nervoso particolarmente semplice, agevolando così l'osservazione delle modificazioni neurali nel corso dell'apprendimento. Kandel sottopose infatti il mollusco a stimoli combinati, condizionando la risposta dell'animale. Il fatto che i neuroni stimolati dai diversi input, alla fine dell'esperimento, presentassero nuove interconnessioni tra loro permise agli scienziati di comprendere come l'apprendimento si basasse o sul rafforzamento di connessioni preesistenti o sulla creazione di nuovi circuiti. Questi studi diedero vita all' *approccio connessionista*, o *Parallel Distributed Processing*, secondo il quale la conoscenza non è situata in un determinato punto, ma piuttosto distribuita in diversi nodi (corrispondenti ai neuroni), i quali contribuiscono a rappresentare molteplici conoscenze. Non vi sarebbe pertanto corrispondenza biunivoca tra un contenuto e una determinata posizione nella rete neurale, ma sarebbe piuttosto la qualità delle interconnessioni della rete stessa (ossia l'organizzazione delle sinapsi) a determinare il livello di apprendimento. Tanto più le interconnessioni costituiscono una rete ben organizzata (quindi dando risposte corrette e veloci), quanto più l'apprendimento sarà efficace. Per questo motivo occorre prestare attenzione alla modificazione della rete, che solitamente avviene con la presentazione di un nuovo input. Di fatto, dal momento che non è in un primo momento chiaro dove inserire questo nuovo stimolo all'interno della rete, è possibile che vengano attivati nodi all'interno della rete non adeguati. Il primo incontro con il nuovo input potrà quindi dare luogo ad apprendimenti parziali o errati, a cui è necessario fornire un feedback affinché i soggetti in apprendimento possano rivedere il concetto proposto e trovare un aggancio più efficace. In questo modo la rete assume via via una strutturazione proficua sia per l'apprendimento sia per il richiamo di informazioni preesistenti (Magro & Muffolini, 2011).

Esiste poi una seconda teoria a sostegno della presente tecnica: il rinforzo hebbiano (Hebb, 1949). Con rinforzo hebbiano si intende quella teoria secondo cui i circuiti neurali sarebbero plasmati dall'utilizzo che il soggetto ne fa. In altre parole i neuroni che più frequentemente e assiduamente vengono sottoposti alla medesima sollecitazione, finiscono per rafforzare il collegamento tra loro. In altre parole "neurons wire together if they fire together" (Lowel & Singer, 1992, p. 209).

Da un punto di vista didattico, la tecnica prevede lezioni composte da tre input (momenti in cui sono coinvolti contenuti disciplinari) separati da due intervalli (momenti in cui l'attività proposta è cognitivamente differente dall'input) di circa dieci minuti ciascuno, secondo il seguente schema:

- ▷ input di argomenti chiave da parte del docente;
- ▷ dieci minuti di intervallo;
- ▷ richiamo degli argomenti chiave;
- ▷ dieci minuti di intervallo;
- ▷ applicazione degli argomenti chiave da parte dello studente.

L'AI come visibile dalla sequenza di attività previste, si differenzia dall'apprendimento massivo, il quale prevede brevi e rari intervalli, o persino nessuno (Smolen, Zhang & Byrne, 2016). L'apprendimento intervallato, per la sua natura, è inoltre riconducibile al modello di didattica trasmissiva e, per questa ragione, viene inquadrato nella situazione didattica (Brousseau, 2008). I risultati ottenuti da vari studi condotti utilizzando l'AI suggeriscono che esso sia efficace nel potenziare la memoria a lungo termine, migliorando il recupero delle rappresentazioni neurali precedenti, grazie al fatto di ridurre i tempi intercorsi tra la prima e le successive proposte di uno stesso oggetto matematico. Questo consentirebbe quindi di mantenere in memoria di lavoro delle rappresentazioni residue che, a distanza di un maggior lasso di tempo, verrebbero eliminate (Feng, Zhao, Liu, Cai, Ye, Chen & Xue, 2019). A scuola infatti ciò che spesso succede è che un oggetto viene presentato per la prima volta alla classe in uno specifico momento, per essere ripreso a distanza di ore o giorni, massimizzando le informazioni fornite durante l'ora di lezione. Alternando invece momenti di input a momenti di pausa, lo stesso oggetto viene ripreso più volte nell'arco della stessa ora.

I migliori risultati in termini di apprendimento ottenuti negli esperimenti sull'AI sembrano essere riconducibili alla variabilità intrinseca tra le singole sinapsi, che impone una presentazione ripetuta dello stesso input al fine di massimizzare la percentuale di sinapsi potenziate (Kramár, Babayan, Gavin, Cox, Jafari, Gall, Rumbaugh & Lynch, 2012). Nello specifico, molte sono le possibili spiegazioni a questo fenomeno. In primo luogo c'è maggiore possibilità di recuperare informazioni accessibili tramite più canali: aumentando i momenti dedicati a un determinato oggetto matematico, cresce il numero delle diverse informazioni che si ottengono a riguardo. Una seconda ragione riguarda la memoria di lavoro. In una lezione massiva, durante l'esecuzione di un'attività didattica strettamente successiva alla precedente, la memoria di lavoro contiene ancora informazioni legate alla prima attività. Ciò porta il cervello a compiere un'operazione di filtro, discriminando le nuove informazioni sulla base dell'attinenza che esse mostrano con quelle già presenti in memoria. Spaziando le attività, la memoria di lavoro viene liberata dalle informazioni precedentemente immagazzinate, aumentando di conseguenza l'efficacia delle strategie di codifica messe in campo. La terza motivazione trova invece origine nei processi neurobiologici relativi al consolidamento della memoria. In primo luogo il consolidamento delle informazioni nella memoria a lungo termine richiede tempo, in seconda battuta il richiamo di informazioni presenti in memoria rinforza la traccia mnestica, stabilizzando il dato immagazzinato (Dunn, Saville, Baker & Marek, 2013). Infatti, i sistemi di memoria selezionano, tra gli stimoli in ingresso, quelli da codificare in modo permanente. Stimoli ripetuti e separati da intervalli privi di stimoli possono favorire processi di memoria a lungo termine che avvengono invero nell'arco di minuti (Kelley & Whatson, 2013). I benefici per l'apprendimento ottenuti con questa tecnica sono stati comprovati da numerose ricerche che hanno coinvolto vari aspetti, quali le abilità verbali, non verbali e motorie, i compiti di memoria, tanto la conoscenza concettuale che procedurale, ma anche la generalizzazione. In quest'ultimo caso si è scoperto come il dimenticare, da parte dei bambini, informazioni che secondo l'adulto erano cruciali, fa parte di un processo di apprendimento funzionale alla generalizzazione. In altre parole, dimenticare alcune informazioni non è necessariamente dannoso per l'apprendimento, ma può rappresentare un processo dominio-generale che promuove lo sviluppo cognitivo (Boser, Scherer, Kuchta, Wenzel & Horz, 2017; Vlach, 2014; Xue, Mei, Chen, Lu, Poldrack & Dong, 2011).

Nonostante le evidenze ottenute, varie ricerche hanno portato alla luce la diffusa credenza tra gli adulti per cui l'apprendimento massivo sarebbe più efficace di quello intervallato. Queste credenze hanno rilevanza per i processi di insegnamento-apprendimento in quanto hanno una diretta influenza sui bambini. Essi infatti giungono a condividere questa credenza per diverse ragioni. Da un lato nell'infanzia non si ha ancora una comprensione generale della memoria e dei suoi meccanismi, per cui difficilmente un alunno della scuola primaria arriverebbe a preferire un tipo di lezione sulla base della propria metacognizione. Pare piuttosto che vi sia un'influenza diretta o indiretta da parte delle figure educative. Nel primo caso i bambini possono arrivare a credere che l'apprendimento massivo sia più vantaggioso dell'AI perché genitori e insegnanti li hanno abituati studiare con l'apprendimento massivo, dal momento che in età adulta è di gran lunga più diffusa la convinzione che l'apprendimento massivo sia più efficiente. Quindi, genitori e insegnanti delle scuole primarie esprimerebbero esplicitamente le proprie preferenze e convinzioni, portando i bambini a sviluppare un pregiudizio. Nel secondo caso invece, i bambini agirebbero per imitazione. Essi cioè, osservando le strategie utilizzate dalle figure di riferimento per memorizzare informazioni, dedurrebbero che il metodo da usare sia quello massivo. Ad esempio, se un adulto deve ricordare un numero di telefono, probabilmente lo leggerà e lo ripeterà a voce alta più volte. Di conseguenza, il bambino apprenderebbe per imitazione che la strategia migliore per memorizzare una nuova informazione è dedicarsi massivamente ad essa. In entrambi i casi di apprendimento, diretto e indiretto, i bambini potrebbero non sviluppare una teoria su come essi apprendono in maniera ottimale, ma piuttosto affidarsi alle esperienze osservate. Per questa ragione è opportuno intervenire già nella prima infanzia promuovendo non solo strategie ottimali di apprendimento, ma anche la metacognizione al fine di rendere consapevoli gli alunni (Vlach, Bredemann & Kraft, 2019). Interessante a questo punto notare come esista uno studio che ha indagato se i bambini percepiscano o meno l'AI come una tecnica più efficace dell'apprendimento massivo, comparando due gruppi a cui sono state insegnate le medesime 24 coppie di parole inglese-farsi rispettivamente con tecnica massiva e intervallata. I risultati ottenuti comparando i livelli di apprendimento ottenuti dai due gruppi hanno mostrato che l'apprendimento intervallato non solo permette di raggiungere risultati migliori, ma viene anche percepito come più efficiente rispetto alle lezioni senza soluzione di continuità (Lotfolahi & Salehi, 2016). Ciò pare essere dovuto al fatto che i processi della memoria a lungo termine, determinati biologicamente e legati all'evoluzione dell'essere umano e imprescindibili per l'apprendimento, siano favoriti da questa tecnica (Kelley, Evans & Kelley, 2018). Tuttavia, al fine di ottenere benefici a lungo termine, è necessario che essa venga utilizzata in maniera continuativa (Churches, Dommett, Devonshire, Hall, Higgins & Korin, 2020). Un ulteriore studio ha quindi indagato la sensibilità dei bambini alla scelta tra AI e apprendimento massivo. È stato chiesto loro di scegliere tra le due tecniche, proponendo una leizone con la tecnica in linea con le loro scelte, ma a un terzo dei partecipanti è stata proposta la tecnica scartata. I risultati ottenuti hanno mostrato come per tutti gli alunni coinvolti i risultati ottenuti con l'apprendimento intervallato sono stati significativamente maggiori rispetto all'altra tecnica. Invece, per quanti costretti ad utilizzare l'AI (preferendo l'altra tecnica) i risultati sono stati migliori rispetto al gruppo che ha appreso massivamente (pur dichiarando la preferenza per tale tecnica), ma non così buoni come per i compagni che hanno manifestato preferenza per l'AI. Di conseguenza, i dati suggeriscono che sebbene si tratti di una tecnica efficace per l'apprendimento, essa non può tuttavia essere considerata come universalmente valida e applicabile indistintamente (Son, 2010).

In ultima istanza, l'apprendimento intervallato non ha trovato ampia diffusione a scuola, probabilmente a causa sia di una scarsità di ricerca in didattica a sostenerlo, sia per la diffusa credenza che l'apprendimento massivo sia preferibile (Sobel, Cepeda & Kapler, 2011; Vlach, Bredemann & Kraft, 2019). Eppure, dal momento che i benefici poggiano su solide evidenze scientifiche, e a livello didattico si tratta di riorganizzare la struttura delle lezioni senza aumentare il tempo dedicato all'insegnamento, pare di interesse scientifico approfondire lo studio di questa tecnica. In ogni caso occorre tenere presente che, affinché la tecnica venga implementata correttamente, è di vitale importanza che ricercatori, insegnanti e personale amministrativo collaborino proficuamente (Sobel, Cepeda & Kapler, 2011).

4.2.2 Inquiry based learning

L'*inquiry based learning* (IBL) è una tecnica didattica afferente alle teorie costruttiviste e socio-costruttiviste dell'apprendimento. In particolare, essa è riconducibile all'active learning (Blessinger & Carfora, 2015; Calvani, 2009). La presente tecnica prevede infatti un'indagine svolta da parte degli alunni che abbia attinenza con il loro vissuto. Lo studente si trova così a porre domande, fare scoperte e verificare rigorosamente quanto emerso, alla ricerca di una risposta al quesito iniziale. Non trattandosi di una tecnica rigida, come ad esempio l'AI, ne esistono molte varianti, adattabili a seconda del contesto, dell'età degli studenti e degli obiettivi di apprendimento. Tuttavia, tutte le attività didattiche fondate sull'IBL possiedono caratteristiche comuni, quali la promozione della curiosità, del coinvolgimento personale e dell'apprendimento. Con questa tecnica si mira altresì a sviluppare e promuovere una forma mentis indagatrice e interessata, finalizzata a un apprendimento attivo (Pavlovičová & Švecová, 2015). Inoltre, l'IBL promuove un ancoraggio delle conoscenze matematiche al mondo reale, mirando non solo alla competenza disciplinare, ma anche ad aumentare il coinvolgimento degli studenti nelle loro comunità di appartenenza, incentivando le interazioni sociali nelle quali la matematica può giocare un ruolo rilevante (Laksana, Dasna & Degeng, 2019). Diversi studi hanno mostrato dati a favore dell'efficacia di tale tecnica, in particolare per le discipline scientifiche, in quanto stimolerebbe le capacità di ragionamento, oltre alla conoscenza dominio-specifica. Ciò sembra riconducibile all'approccio induttivo che vi sta alla base, ma anche al fatto che è particolarmente efficace per quegli apprendimenti controintuitivi che prevedono una revisione delle preconoscenze possedute dai bambini (Laksana, Dasna & Degeng, 2019; van der Graaf, van de Sande, Gijsel & Segers, 2019). Se comparata con le tecniche di istruzione diretta, in cui è l'insegnante a indicare alla classe la via da seguire, l'IBL si dimostra migliore nel promuovere una reale comprensione degli oggetti matematici da parte dei bambini (Laksana, Dasna & Degeng, 2019). Essi sono infatti soggetti attivi nella costruzione di conoscenze, che vengono condivise e dibattute con i compagni, dopo essere state estrapolate da varie fonti (siti web, riviste scientifiche, libri, ecc.). Non solo, lo stesso processo prevede compiti sfidanti, tra cui l'elaborazione di una strategia, la raccolta di informazioni, il confronto tra risultati differenti, la presentazione dei risultati alla classe. Per questo motivo viene intrinsecamente promosso il lavoro in gruppo (Ibidem). Studi sull'implementazione dell'IBL a scuola hanno poi evidenziato la sua cruciale rilevanza per lo sviluppo di capacità di pensiero di ordine superiore. L'utilizzo della presente tecnica avrebbe inoltre ottenuto risultati incoraggianti nell'indurre gli alunni a indagare riguardo a temi e questioni significativi, proponendo risposte pertinenti, con conseguente attivazione della curiosità e dell'interesse dei bambini per questioni di natura matematica (Ruzaman, Rosli & Onn, 2020).

Un'attività didattica con l'IBL ripercorre le tappe che solitamente vengono affrontate nel corso di una sperimentazione. Trattandosi di ricerche condotte da bambini, i risultati ottenuti sono generalmente utili negli specifici contesti in cui esse sono condotte, ossia la classe, producendo conoscenze valevoli a livello locale e fortemente dipendenti dal valore attribuitovi da parte degli adulti, in particolare dalle figure educative di riferimento (genitori e insegnanti), che sostituiscono in questo caso la comunità scientifica di riferimento (Chae-Young, 2017). Essa prevede la strutturazione di unità di apprendimento secondo uno schema predefinito, che ricalca le fasi di ricerca, come segue:

▷ **step 1** (orientamento), l'insegnante fornisce una situazione di partenza da risolvere con due scopi: da un lato catturare l'attenzione degli alunni, dall'altro sondare e riattivare le preconoscenze sull'argomento;

▷ **step 2** (ipotesi), gli alunni in piccolo gruppo propongono delle domande a cui è necessario trovare risposta oppure formulano delle ipotesi per poter risolvere la situazione di partenza;

- ▷ **step 3** (pianificazione e ricerca), gli studenti ricercano le risposte e/o sperimentano le ipotesi proposte;

- ▷ **step 4** (analisi e interpretazione), si ricerca un'efficace modalità di presentazione dei risultati ottenuti alla classe;

- ▷ **step 5** (conclusione), gli alunni presentano i risultati ottenuti dando vita a un dibattito critico e costruttivo con la classe.

L'IBL prevede dunque varie attività didattiche, vale a dire la selezione delle idee iniziali da parte degli studenti (pre-indagine), la revisione delle suddette idee (durante l'indagine), la negoziazione dei risultati ottenuti (post-indagine). Il fil rouge delle attività è il gruppo di lavoro in cui i bambini si trovano a lavorare cooperando. Esso ha come compiti: esplorare le possibili informazioni, selezionando quante ritenute utili, verificare le ipotesi postulate, raccogliere dati a loro favore e presentare i risultati agli altri gruppi. Queste attività favoriscono un'attribuzione di significato da parte dei bambini agli apprendimenti proposti, dal momento che l'insegnante si riserva il ruolo di facilitatore e non di mediatore di conoscenze, incoraggiando un apprendimento di tipo attivo (Laksana, Dasna & Degeng, 2019). La presente tecnica trova ulteriore ragion d'essere in quanto scardina il contratto didattico, rientrando a tutti gli effetti nelle situazioni a-didattiche (Brousseau, 2008). Pare dunque che l'IBL, grazie alla partecipazione attiva richiesta all'alunno, promuova un reciproco "adattamento" tra gli studenti e le attività didattiche proposte dall'insegnante di matematica, contribuendo così a un ripristino dell'equilibrio tra obiettivi formativi posti dall'insegnante e quelli posti dallo studente. Con questa tecnica vengono infatti proposte situazioni di apprendimento in cui l'interesse personale funge da motore; si fa in altre parole leva sulla motivazione intrinseca (Makar, Ali & Fry, 2018). Inoltre, la curiosità dei bambini è risultata correlata positivamente al loro apprendimento, ossia i bambini con maggiori livelli di curiosità apprendono maggiormente con l'IBL rispetto ai bambini meno curiosi (Van Schijndel, Jansen & Raijmakers, 2018). Di conseguenza, stimolare un approccio scientifico, quindi interessato ma attento, ha benefici per i livelli di competenza raggiunti dalla classe. Questo aspetto è tanto più rilevante se si considerano le implicazioni legate al gap di genere e all'ansia matematica presentate nel precedente capitolo: l'IBL scardina la profezia che si autoavvera per cui le alunne sono sottoposte a fattori psicologici controproducenti con conseguenti limitazioni all'apprendimento matematico. Esse, percependo i contenuti matematici come meno appetibili, meno utili per il loro futuro professionale, e sé stesse come meno capaci (unitamente a maggiori livelli di ansia in matematica e minori livelli di autoefficacia in questa disciplina), mostrano minor interesse per la disciplina, e spesso anche minori competenze (Dehaene, 2010).

Esistono tre tipologie di IBL: strutturato, guidato e aperto, che vanno da un orientamento all'informazione a uno alla scoperta, da un'età più bassa (comunque a partire dai 6 anni) a una maggiore (la tipologia aperta è consigliata per la secondaria). Tra le tre, la tipologia guidata è stata fortemente raccomandata a partire dalla terza classe della scuola primaria, in un'ottica costruttivista, in quanto l'insegnante mantiene un ruolo di mediazione che permette agli alunni maggiore autonomia. Idealmente, la tecnica prevede infatti l'applicazione di una strategia di indagine che coinvolga attività pratiche (quali la ricerca di informazioni, la catalogazione, l'osservazione, ecc.), durante le quali gli studenti studiano attivamente fenomeni reali (Laksana, Dasna & Degeng, 2019). Negli ultimi anni, vari rapporti, studi e ricerche internazionali hanno rilevato uno scarso interesse dei più giovani verso le scienze e la matematica, nonostante la loro rilevanza in tutti i contesti di vita (García-García, Quesada-Armenteros, Romero Ariza & Abril Gallego, 2019). Ciò potrebbe trovare motivazione in una disaffezione da parte degli alunni per le materie scientifiche. Come invero visto nel precedente paragrafo, il rinforzo hebbiano (Hebb, 1949) spiegherebbe il motivo per cui un alunno che associ un'emozione negativa con una determinata materia, come ad esempio la matematica, potrebbe provare ansia indipendentemente dalla disciplina. Potrebbe cioè sperimentare emozioni spiacevoli in situazioni in cui sia implicata la conoscenza matematica a causa del nesso creatosi tra la materia e l'ansia, anche se l'esperienza proposta non ha nessuna connotazione negativa ed è alla portata dell'individuo (Tokuhama-Espinosa, 2011). L'interesse per IBL, capace di promuovere un atteggiamento positivo nei confronti della matematica, è dunque recentemente aumentato in Europa (Rocard, 2007). La stessa Unione Europea ha auspicato una maggiore diffusione nelle scuole del continente di tecniche didattiche foriere di un cambio di prospettiva da parte di bambini e adolescenti, tra cui l'IBL (Pavlovičová & Švecová, 2015).

Nonostante questi auspici, l'utilizzo effettivo dell'IBL a scuola pare ancora limitato: se da un lato gli insegnanti condividono in larga parte i benefici ottenuti dall'implementazione di questa tecnica e si dichiarano favorevoli ad adottarla, dall'altro non vi è lo stesso grado di adesione quando si tratta di applicarla in aula (Letina, 2019). Ciò pare essere riconducibile a una duplice ragione: in primo luogo la stragrande maggioranza degli insegnanti non ha vissuto nel proprio percorso scolastico attività di IBL e questa mancata esperienza sembra minare alla fiducia che essi vi ripongono; in secondo luogo vi è una mancanza di formazione a riguardo, così come avviene generalmente per MCD (Ibidem).

4.2.3 Learning by doing con l'utilizzo di manipulatives

Il *learning by doing* (LBD) con l'utilizzo di manipulatives è una tecnica specifica della didattica della matematica supportata da numerosi studi a riguardo (Kamina & Iyer, 2009). In dettaglio è stato sottolineato come il LBD aumenti il grado di metacognizione negli alunni, fondamentale in matematica per comprendere i principi che sottendono a procedure, algoritmi e regole aritmetiche (Barnes, 1989; Forman, 1989; Kyriacou & Goulding, 2006). Questa tecnica trova fondamento in alcune teorie di cognizione numerica. In particolare fa riferimento al modello del triplo codice di Dehaene (1992), secondo cui ciascuna rappresentazione numerica attiva una specifica area neurale. Ciò implica che l'utilizzo di oggetti concreti, piuttosto che di una rappresentazione arabica o verbale, diminuisce il carico cognitivo.

Il livello di astrazione richiesto dalle rappresentazioni arabiche o verbali è infatti maggiore: esso implica un pensiero algebrico e non aritmetico, ossia una riflessione logica riguardo al numero piuttosto che un'operazione con le quantità (Devlin, 2010). Nel cervello adulto i tre circuiti neurali comunicano tra loro permettendo una rapida e precisa conversione da un formato all'altro, ma nel cervello infantile non è così. L'evoluzione dell'organizzazione del triplo codice a livello cerebrale comincia circa a tre mesi di vita, quando nella regione intraparietale destra si registrano attivazioni durante semplici compiti numerici. Da qui la convinzione che il senso del numero abbia una base genetica, in maniera dissimile dai sistemi verbale e arabico, che sono a tutti gli effetti dei costrutti culturali afferenti in particolare alla cultura occidentale e vanno pertanto appresi (Dehaene, 2010). A partire da questa base genetica, la costruzione di reti neurali capaci di sostenere una conversione ottimale da un formato all'altro impiega anni per ottenere un'automatizzazione. Per questa ragione introdurre nuove conoscenze aritmetiche utilizzando il formato analogico ne agevola la comprensione, in questo modo si sfrutta il circuito più sviluppato, soprattutto nei primi anni di scolarizzazione, e si evita un sovraccarico cognitivo. Proporre le versioni arabica e verbale in un secondo momento permette infatti all'alunno di non focalizzare la propria attenzione sulla traduzione da un codice all'altro, ma piuttosto sulla nuova conoscenza introdotta. La trasposizione, avvenendo in un momento successivo, libera di conseguenza risorse cognitive per l'apprendimento (Ibidem). Ciò è ben differente dal proporre al bambino oggetti concreti in quanto non ancora capace di astrarre: vi sono solide evidenze scientifiche a sostegno dell'abilità di astrazione già nei neonati (Dehaene, 2010). Si tratta piuttosto di sfruttare la rappresentazione di quantità più congeniale ai primi apprendimenti matematici, ossia la rappresentazione semantica dei numeri. Essa infatti risulta in cognizione numerica avere un ruolo fondamentale per l'apprendimento matematico: solide evidenze scientifiche dimostrano come le quantità vengano rappresentate a livello mentale con il codice analogico e non con quello verbale arabico (Zorzi, Berteletti & Lucangeli, 2010). Le operazioni aritmetiche e matematiche poggiano inoltre sull'elaborazione visuo-spaziale. Utilizzare quindi questo

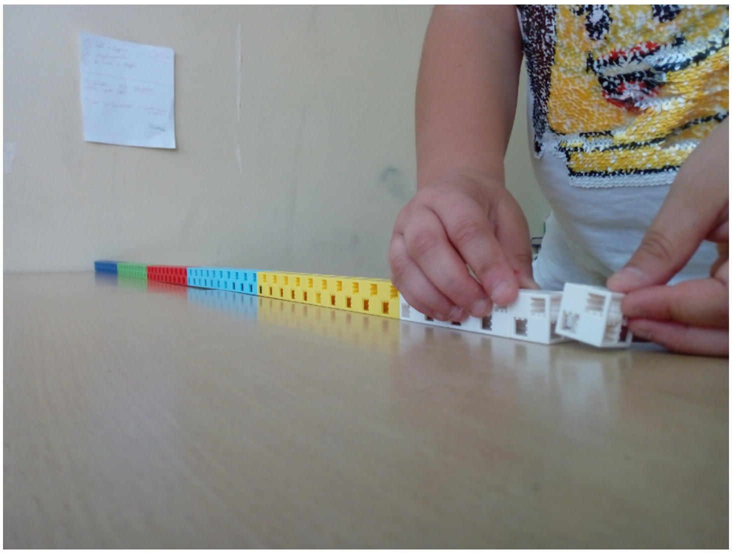


Figura 4.3: Alunna che costruisce un'asta da 100 unità con gli ArtecBlocks (ogni unità corrisponde a un cubo e ogni decina è caratterizzata da un colore differente).

canale per fornire informazioni matematiche favorisce la comprensione e l'acquisizione di nuovi concetti: fornendo un'immagine, che da concreta viene tradotta in mentale, a supporto dell'apprendimento consente all'alunno di scegliere la strategia che più ritiene opportuna al fine di risolvere un qualsiasi problema matematico (Bizzarro, Mammarella & Girelli, 2010).

Nonostante tali evidenze, l'utilizzo di manipulatives, ossia materiali concreti utilizzati allo scopo di presentare un concetto matematico o di supportare una procedura matematica, pur essendo diffuso in molte scuole estere (Correa et al., 2008; Puchner et al., 2008), non è stato oggetto di studio di un numero di ricerche scientifiche sufficiente per determinare quali e quanti siano i benefici per l'apprendimento (Laski et al., 2015). Nel presente progetto di ricerca, il LBD è stato dunque introdotto in aula attraverso la proposta di uno strumento per l'apprendimento della didattica della matematica: cubi ad incastro (ArtecBlocks), progettati specificatamente per l'apprendimento matematico secondo la presente tecnica (visibili in figura 4.3).

Uno dei motivi per cui la presente tecnica non ha trovato diffusione potrebbe essere ricondotto alla convinzione comune tra gli insegnanti che il conteggio di oggetti concreti, come ad esempio utilizzando le dita della mano, sia da evitare. Questa tesi, che ancora una volta accomuna un buon livello di competenza matematica con una buona memorizzazione dei fatti aritmetici, prescinde dalla costruzione di quest'ultimi, favorendo un apprendimento di tipo meccanico, basato sulla memorizzazione e non su una reale assimilazione delle conoscenze matematiche (Dehaene, 2010). L'utilizzo delle dita pare invero essere un passaggio che i bambini affrontano autonomamente, una pratica che viene mantenuta nonostante il divieto dell'insegnante. Da un punto di vista neuroscientifico, questo comportamento pare essere dovuto al fatto che la rappresentazione numerica mentale si riflette nella mano: non a caso la prima linea numerica ad ottenere caratteristica di linearità è quella che va da 1 a 10 (Rinaldi, Di Luca, Henik & Girelli, 2016). Di conseguenza, l'utilizzo di oggetti concreti di pari caratteristiche rafforzerebbe il legame tra la rappresentazione dell'oggetto matematico in aula e la sua rappresentazione mentale (Butterworth, 2000). Vi sono ulteriori evidenze a sostegno di questa tesi: lo sviluppo di abilità di calcolo sempre più efficienti pare essere legato all'utilizzo delle mani durante le operazioni aritmetiche (Gelman & Gallistel, 1986). La manipolazione risulta pertanto cruciale per la costituzione di una relazione intrinseca tra gli obiettivi dell'attività, le azioni di ciascuno studente e il feedback su tali azioni fornito dal materiale stesso (definito in questo caso come *autocorrettivo*). Quando è infatti lo stesso ambiente di apprendimento a fornire un feedback, e quando esso ha carattere informativo per lo studente, esso consente a quest'ultimo di capire come adattare le proprie azioni in relazione all'obiettivo. In questo modo si incoraggiano gli studenti a un atteggiamento di autocritica costruttiva, favorendo la metacognizione, evitando che si affidino unicamente all'insegnante (Butterworth, 2011), mitigando effetti quali il Jourdain (Marazzani, 2009). Per questa ragione il learning by doing, prevedendo l'utilizzo di manipulatives, ben si presta ad occasioni di apprendimento in situazioni a-didattiche (Brousseau, 2008). Esso viene infatti ricondotto sia al modello di didattica costruttivista, sia a quello enattivista in quanto la conoscenza matematica si incarnerebbe, seguendo quindi gli assunti della teoria enattivista che postula l'embodied cognition. In dettaglio, l'attività con oggetti concreti verrebbe *internalizzata*, ossia eseguita dal cervello (in particolare attivando la corteccia premotoria) utilizzando una specifica parte del nostro corpo, le mani. Non vi sarebbe quindi soluzione di continuità nel corso dell'azione, che coinvolgerebbe tanto gli organi percettivi quanto il cervello (Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018).

L'utilizzo di manipulatives pare inoltre apportare migliori risultati di apprendimento in matematica, in quanto prevede l'interazione diretta tra gli alunni e la rappresentazione analogica di oggetti matematici. Poter avere un contatto fisico con queste rappresentazioni, sembra infatti agevolare la comprensione e di conseguenza l'acquisizione degli oggetti stessi (Carbonneau, Marley & Selig, 2013). Studi condotti alla scuola primaria hanno mostrato come l'introduzione di manipulatives abbia avuto un effetto positivo sui risultati raggiunti in matematica da parte dei bambini. Tali risultati trovano spiegazione nel fatto che poter manipolare rappresentazioni matematiche consente in primo luogo di sviluppare metodi e strategie inedite per gli alunni, raggiungendo così una maggiore comprensione matematica, oltre che migliori abilità di problem-solving (Liggett, 2017; Novack, Congdon, Hemani-Lopez & Goldin-Meadow, 2014). Chi detiene il ruolo formativo in classe ha tuttavia l'onere di selezionare i manipulatives in base all'oggetto matematico che si vuole far osservare durante l'attività. Ad esempio, chiedere alla classe di rappresentare un cubo utilizzando cannucce e plastilina convoglierà l'attenzione su vertici e spigoli, mentre utilizzando superfici a incastro si darà maggior rilevanza alle facce (Torra, 2016). Pare invece che la scelta dei manipulatives da parte dei docenti sia influenzata dalla familiarità che essi ne hanno e dalle credenze sviluppate riguardo all'efficacia che essi hanno per l'apprendimento matematico, dimostrando in altre parole un non adeguato livello di consapevolezza a riguardo (Moyer-Packenham, Salkind & Bolyard, 2008). Infine, sono stati raccolti dati a supporto di una correlazione negativa tra l'implementazione di questa tecnica e i livelli di ansia esperiti dagli alunni, sia in termini di ansia generale che di ansia matematica, rispetto a tecniche didattiche tradizionali. In particolare l'utilizzo di manipulatives nel

LBD permetterebbe ai bambini di comprendere oggetti matematici e costruire delle conoscenze valide procedendo per prove ed errori, rivedendo le loro preconoscenze, oltre ad essere motivati a trovare una soluzione personale, con conseguente aumento dell'autoefficacia e della motivazione (Filippatou, Pantazi & Triandafillidis, 2016).

5 | Lo studio

5.1 Obiettivi e ipotesi

La presente ricerca intende inserirsi nel filone di Didattica della Matematica dedicato all'insegnamento matematico (Schoenfeld, 2000). Come visto già nel primo capitolo, sovente le teorie didattiche restano inapplicate, lasciando spazio in aula a improvvisazione e mode didattiche, che tuttavia sono riconducibili al paradigma teorico più o meno implicitamente adottato dal docente (Trinchero, 2013). Lo scopo dello studio è dunque quello di indagare l'interazione tra la tecnica didattica elaborata da ciascun insegnante e valutare se l'adozione di tecniche teorizzate nell'ambito della Didattica della Matematica, secondo gli assunti di MCD, possa migliorare l'apprendimento e in che misura questo avvenga. Si vuole in altre parole indagare se la coerenza tra il paradigma assunto dal docente e quello di afferenza di nuove tecniche proposte sia determinante per migliorare l'apprendimento, o se invece sia un fattore da escludere.

Nel dettaglio, la scelta delle tecniche didattiche è avvenuta tenendo conto di due fattori: la loro limitata diffusione nelle scuole primarie italiane e la presenza di letteratura riguardo alla loro efficacia in termini di apprendimento matematico. Nello specifico, sono state selezionate l'inquiry based learning, il learning by doing con l'utilizzo di manipulatives e lo spaced learning. Le ipotesi di ricerca di seguito illustrate si basano quindi sui risultati ottenuti dall'applicazione di ciascuna delle tecniche, tenendo conto dei livelli di accuratezza, di stabilità e di trasferibilità degli apprendimenti, ma anche a quelli di motivazione intrinseca e piacevolezza dell'apprendimento (Cambi, 2004;

Deci & Ryan, 1985). L'apprendimento matematico nell'infanzia poggia infatti sia su fattori emotivi che su fattori cognitivi. Nel primo caso si è tenuto conto dei livelli di ansia matematica, ma anche delle opinioni e delle preferenze espresse dai bambini. Nel secondo caso delle abilità matematiche (in particolare aritmetiche) e delle funzioni cognitive, in quanto fattore di grande influenza sulla competenza matematica nel primo ciclo di scolarizzazione (Clements, Sarama & Germeroth, 2016).

Ipotesi

1. correlazione positiva tra l'orientamento metodologico dell'insegnante e i risultati raggiunti dagli studenti con le tecniche didattiche afferenti al medesimo orientamento;
2. correlazione positiva tra la proposizione di tecniche didattiche rientranti nelle preferenze evidenziate dagli alunni e risultati raggiunti;
3. correlazione negativa tra i livelli d'ansia e i livelli di abilità raggiunti con le tecniche di natura costruttivista o enattiva (situazioni a-didattiche).

5.2 Metodo

5.2.1 Partecipanti

Sono state coinvolte sei classi di due differenti scuole primarie del Nord-Est italiano: rispettivamente quattro terze appartenenti alla prima scuola e due quarte facenti parte della seconda. La prima scuola, situata in contesto urbano, presenta un indice economico e socio-culturale (ESCS [1]) di livello alto, con una percentuale di alunni con background migratorio pari al 25,1% (PTOF Istituto Comprensivo Bolzano VI, 2017). Anche la seconda scuola è situata in contesto urbano, con ESCS medio-alto e una percentuale di

[1] Con indice ESCS, ci si riferisce all'indice che descrive lo status economico, sociale e culturale definito dall'Ocse nel 2002 e adottato in ricerche nazionali e internazionali (Invalsi, Pisa, Timms, IEA, ecc.). Il punteggio finale attribuito a ciascuno studente si compone di indicatori quali l'educazione dei genitori, la loro occupazione e i beni presenti nell'abitazione dello studente (come ad esempio il numero di libri, l'accesso a internet e a dispositivi elettronici).

alunni stranieri pari allo 0,44% (Progetto Istituto Comenius, 2017).

Il campione totale (di convenienza) consta quindi di 138 alunni: 90 frequentanti la terza classe e 48 la quarta, di cui 23 con BES o DSA (16,66%), 6 stranieri di prima e 27 di seconda generazione (23,91% di alunni stranieri sul campione totale, a fronte di una media italiana del 9,7%; Miur - Ufficio Statistica e studi, 2019). Hanno partecipato anche le rispettive insegnanti di matematica, per un totale di 5 docenti (una delle insegnanti detiene la docenza di matematica in entrambe le classi quarte).

Il presente progetto di ricerca è stato inserito nel piano formativo approvato dai Consigli d'Istituto delle due realtà scolastiche coinvolte, per cui la raccolta dati gode dell'autorizzazione dei rispettivi Dirigenti Scolastici, oltre che delle insegnanti e dei genitori, in quanto rientra nelle autorizzazioni raccolte a inizio anno dagli Istituti.

5.2.2 Materiali e procedure

Per rispondere alle ipotesi di ricerca è stato utilizzato un metodo misto, quali-quantitativo, impiegando differenti strumenti illustrati di seguito. La descrizione di materiali e procedure può risultare eccessivamente articolata, trattandosi tuttavia di una ricerca in aula, la complessità che sottende richiede un'esposizione dettagliata. La ricerca sul campo a scuola, come ricordano Plummer e colleghi (2014), può infatti essere paragonata a uno spettacolo teatrale: la pianificazione prevede in entrambi i casi la selezione di un grande numero di personaggi, che saranno in parte in scena e in parte dietro le quinte, così come un gran numero di prove, spesso con feedback negativi, ancor prima del giorno della prima, ossia la raccolta dati effettiva. Ciò comporta necessariamente una preparazione logistica attenta e approfondita, che tenga conto dell'alto numero di stakeholders, ma anche del fatto che l'elevata quantità di variabili estranee vada non solo tenuta in considerazione, ma anche sotto controllo. La descrizione della sperimentazione è stata quindi suddivisa in tre fasi: preliminare, di sperimentazione didattica e di approfondimento.

1. FASE PRELIMINARE

Un'intervista online semi strutturata (Coin, 2016) è stata somministrata alle insegnanti coinvolte, al fine di identificare il loro modello didattico di riferimento. Nel dettaglio, l'intervista mirava a raccogliere dati riguardanti caratteristiche anagrafiche, caratteristiche dell'ambiente di apprendimento, strumenti e metodologie utilizzate in aula, considerazioni riguardo ad alcuni principali costrutti della didattica (ad esempio cosa significhi secondo loro insegnare e apprendere, quali siano i ruoli di insegnanti e alunni, la definizione di classe, come avvenga la progettazione, la preparazione dei materiali e la valutazione, la conoscenza dei modelli didattici indagati).

2. FASE DI SPERIMENTAZIONE DIDATTICA

Questa seconda fase risulta sia a livello descrittivo che di ricerca quella di maggiore complessità. Ai fini di una maggiore chiarezza saranno quindi dettagliati i passaggi avvenuti:

a.) in sede di programmazione didattica è stato chiesto alle insegnanti di definire quattro abilità e/o conoscenze tratte rispettivamente dall'ambito di contenuto *Numeri* (Indicazioni Provinciali per la definizione dei curricoli del primo ciclo d'istruzione della scuola in lingua italiana della Provincia Autonoma di Bolzano) e dall'*obiettivo di competenza 1* (Linee guida per l'elaborazione dei Piani di Studio delle Istituzioni Scolastiche della Provincia Autonoma Di Trento): utilizzare con sicurezza le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, scritto e mentale, anche con riferimento a contesti reali su cui sviluppare nel corso dell'anno scolastico distinte unità di apprendimento. Si è preferito dare libertà di scelta ai docenti al fine di ridurre quanto più possibile l'influenza da parte dello sperimentatore.

b.) una volta identificati argomenti, obiettivi e distribuzione nel corso dell'anno scolastico delle unità di apprendimento, è stato chiesto alle insegnanti di progettare la prima unità da loro prevista, chiedendo

espressamente di procedere come avrebbero fatto in assenza di sperimentazione.
Si è quindi proceduto contestualmente alla somministrazione agli alunni del test carta e matita AC-MT 6-11: test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi (Cornoldi, Lucangeli, & Bellina, 2012). Tale test è stato usato sia prima sia dopo l'unità di apprendimento. Si precisa come non sia stata assegnata in nessun caso la sezione riguardante la soluzione di problemi (non pertinente alla domanda di ricerca). Inoltre, nelle classi terze coinvolte è stata affrontata solo la sezione carta e matita, mentre con le quarte è stata somministrata anche la sezione individuale (non per scelta dello sperimentatore, ma per necessità espresse dalla scuola). Unitamente al test AC-MT, in ciascuna delle classi, sono state condotte interviste semistrutturate orali di classe a seguito dell'unità di apprendimento. Per ridurre il rischio di ottenere informazioni falsate, è stato chiesto alle insegnanti di uscire dall'aula durante le interviste, che sono state audio registrate a insaputa degli alunni (vista la loro giovane età si sarebbe presentato un forte rischio di comportamenti influenzati dalla registrazione, mettendo in dubbio la riuscita stessa dell'intervista). La traccia dell'intervista è stata costruita tenendo conto di cinque delle sei categorie identificate in The Framework for Teaching Clusters (Danielson, 2018), quali categorie del processo di insegnamento-apprendimento correlate al raggiungimento di apprendimenti ad alto livello in matematica. Nel dettaglio sono costituite da: chiarezza degli obiettivi di apprendimento e accuratezza dei contenuti (clarity of instructional purpose and accuracy of content); ambiente di apprendimento sicuro, rispettoso, supportivo e stimolante (safe, respectful, supportive, and challenging learning environment); gestione della classe (classroom management); coinvolgimento degli studenti nell'apprendimento (student intellectual engagement); successo formativo da parte di ciascuno studente (successful learning by all students); professionalità da parte dell'insegnante (professionalism). Si è mantenuta la dicitura in entrambe le lingue in quanto è assente in

letteratura la traduzione italiana. L'ultima categoria è stata esclusa dalle interviste in quanto non sottoponibile a studenti di così giovane età.

c.) in ciascuna scuola è stato condotto un breve corso di formazione sulle tre tecniche proposte (inquiry based learning, learning by doing con l'utilizzo di manipulatives, spaced learning), a cui hanno partecipato, su richiesta dei Dirigenti Scolastici, anche insegnanti non coinvolti nella ricerca.

d.) sono state elaborate da ciascun docente le ulteriori tre unità di apprendimento previste a inizio anno, della durata di circa un mese ciascuna, tenendo conto del fatto che si sarebbe dovuto proporre ciascuna unità usando una tecnica differente. È a questo punto doveroso segnalare che le insegnanti delle terze solitamente programmano assieme le unità didattiche, in modo da garantire una proposta curricolare omogenea all'interno dell'Istituto. Per evitare creare bias nei risultati, si è quindi preferito permettere alle docenti di procedere come d'abitudine, fermo restando che ciascuna insegnante ha in ogni momento pienamente goduto della possibilità di personalizzare strumenti e attività didattiche. È stato quindi somministrato il test AC-MT pre e post di ciascuna delle tre unità, mentre l'intervista di classe è stata proposta al termine di ogni unità di apprendimento.

3. FASE DI APPROFONDIMENTO

A seguito della conclusione delle quattro unità di apprendimento, quindi in prossimità del termine dell'anno scolastico, è stato chiesto ad alunni e insegnanti di sottoporsi al questionario carta e matita ME-MA, atto a valutare metacognizione, atteggiamenti negativi e ansia in matematica (Caponi, Cornoldi, Falco, Focchiatti, & Lucangeli, 2012). Nelle classi quarte la somministrazione è avvenuta in modo autonomo ed è stata suddivisa

in due giorni (per evitare che gli studenti avessero un calo di attenzione nell'ultima parte), mentre nelle classi terze si è proceduto in maniera collettiva: la dottoranda leggeva ogni domanda ad alta voce e i bambini segnavano sul protocollo la loro risposta, dando loro modo di chiedere spiegazioni di eventuali termini non conosciuti, pur evitando ogni possibile influenza sulla risposta data. Entrambe le procedure sono suggerite nel manuale di riferimento.
Infine, sono stati raccolti dati inerenti le funzioni esecutive degli alunni tramite l'Embedded Figures Test (CEFT), sempre carta e matita (Witkin, 1971). Nel dettaglio quest'ultimo test è stato adattato e proposto ai bambini come un "gioco da detective" in cui figure più semplici (fornite sotto forma di mazzo di carte) andavano ricercate in figure più complesse (ciascuna presente singolarmente su pagina bianca in un libretto costruito ad hoc).

5.2.3 Analisi dei dati

Intervista semistrutturata sul modello didattico di riferimento

Al fine di individuare il modello didattico di riferimento di ciascuna delle cinque insegnanti coinvolte è stata condotta un'analisi testuale delle interviste semistrutturate. A tal scopo è stato adottato il software R (R Core Team, 2014), e in particolare il pacchetto per le analisi di tipo qualitativo *R Qualitative Data Analysis* (RQDA). Sulle risposte ottenute è stata operata una classificazione a seconda degli indici di frequenza, dopo aver ricondotto le risposte a categorie nominali corrispondenti ai tre principali modelli teorici riportati nel primo capitolo del presente lavoro di tesi (come riportato in Coin, 2016).

Intervista semistrutturata di classe

Per l'analisi delle interviste condotte con le classi è stato ancora utilizzato il pacchetto RQDA di R. La classificazione delle risposte in categorie nominali è stata condotta tenendo conto del framework di riferimento (Danielson, 2018), che ha ordinato gli indicatori osservabili per ciascuna categoria.

Successivamente, l'analisi degli indici di frequenza ha permesso di stabilire in che misura ognuna delle tecniche adottate (compresa quella elaborata da ciascun insegnante) è stata percepita dalla classe come funzionale al proprio apprendimento.

CATEGORIA	INDICATORI ANALIZZATI
Chiarezza degli obiettivi di apprendimento e accuratezza dei contenuti	**Insegnante:** ▷ utilizzo di risorse didattiche in classe; ▷ livello di chiarezza delle spiegazioni disciplinari; ▷ valutazione formativa. **Alunni:** ▷ incoraggiamento del ragionamento matematico e del problem solving.
Ambiente di apprendimento sicuro, rispettoso, supportivo e stimolante	**Insegnante:** ▷ atteggiamento supportivo (aspettative riguardo all'apprendimento). **Alunni:** ▷ perseveranza in attività difficili; ▷ sentimenti di orgoglio per le difficoltà superate o meno.
Gestione della classe	**Insegnante:** ▷ supporto da parte del contesto per il rispetto delle regole (ad es. regolatore di rumorosità). **Alunni:** ▷ partecipazione alla definizione delle regole; ▷ chiarezza delle regole stabilite.

CATEGORIA	INDICATORI ANALIZZATI
Coinvolgimento degli studenti nell'apprendimento	**Alunni:** ▷ importanza percepita riguardo al contenuto disciplinare; ▷ qualità delle argomentazioni; ▷ sfida intellettuale.
Successo formativo da parte di ciascuno studente	**Insegnante:** ▷ adattamento della lezione a seconda del suo andamento; ▷ feedback forniti agli studenti. **Alunni:** ▷ risorse disponibili per l'apprendimento; ▷ autovalutazione.

Tabella 5.1: Adattamento della tabella sugli indicatori per processi di insegnamento-apprendimento matematico di qualità.

Si conclude dalla pagina precedente

Questionario ME-MA

L'analisi dei dati raccolti tramite i questionari rivolti agli alunni e alle insegnanti è stata svolta con un foglio elettronico (Excel), fornito con il manuale (Caponi, et al., 2012). I profili oggetto di analisi sono stati quelli di ogni insegnante e delle rispettive classi. Tale strumento risulta particolarmente vantaggioso in quanto permette di confrontare i risultati delle singole classi con i dati normativi di riferimento, aumentando così l'affidabilità delle analisi. A partire dal punteggio grezzo ottenuto da ogni singolo alunno, utilizzando i dati normativi di riferimento, è stato ricavato per ogni classe il valore indicativo di scarto o deviazione standardizzata dalla media, grazie alla funzione:

$$z = \frac{\text{punteggio del soggetto} - \text{media di riferimento}}{\text{deviazione standard di riferimento}} \tag{5.1}$$

In tal modo sono stati ottenuti i punteggi zeta (z), determinando a che distanza dalla media, in termini di deviazione standard, si posizionino i risultati ottenuti, e se essi siano superiori (segno +) o inferiori (segno -) alla norma della distribuzione. I punteggi z delle insegnanti e dei singoli alunni, e di conseguenza delle classi, sono quindi stati trasposti in punti T, ossia punteggi standardizzati atti a confrontare la prestazione del singolo soggetto con quella del campione di riferimento, seguendo la formula:

$$T = 50 + (10xz) \tag{5.2}$$

Test AC-MT

I punteggi parziali ottenuti dalle singole prove (operazioni scritte, giudizio di numerosità, trasformazione in cifre, ordinamento di serie dal minore al maggiore e dal maggiore al minore per tutte le classi, e calcolo a mente, calcolo scritto, enumerazione, dettato di numeri e recupero di fatti numerici in aggiunta per le classi quarte) sono stati raggruppati in quattro indici, al fine di agevolare le analisi: operazioni scritte in classe e conoscenza numerica (tutte le classi), accuratezza, tempo totale (solo per le quarte). Dal momento che in terza, per questioni organizzative interne alla scuola, non è stato possibile somministrare la parte individuale sono stati considerati solo i valori della parte collettiva.
I dati ottenuti in operazioni scritte in classe e conoscenza numerica sono stati quindi confrontati con i dati normativi di riferimento, suddivisi per classe frequentata e periodo dell'anno scolastico in cui è stato somministrato il test.

Test CEFT

Dal momento che il CEFT è un test di tipo progressivo, è stata considerata la somma delle risposte corrette ottenute da ciascun alunno. Il valore dei singoli partecipanti è stato successivamente comparato con i valori di riferimento del test, suddivisi per genere ed età.

Confronto tra risultati ottenuti

Al fine di cogliere le correlazioni esistenti tra i risultati ottenuti con il test AC-MT nei diversi time point e l'orientamento espresso da insegnanti (intervista semistrutturata sul modello didattico di riferimento) e dalla classe (intervista semistrutturata di classe), si è deciso di considerare la differenza delle medie ottenute in operazioni scritte in classe e conoscenza numerica tra il time point successivo e antecedente ciascuna delle unità di apprendimento. In questo modo è stato confrontato l'apprendimento matematico avvenuto in ciascun intervallo di tempo, e non i risultati raggiunti. Se si fosse infatti considerata unicamente la media al termine delle unità, non si sarebbe tenuto conto dell'influenza del tempo trascorso. Il software utilizzato per queste analisi è Jasp, un software open-source sviluppato dall'università di Amsterdam.

Per verificare la prima ipotesi, è stato condotto un test t di Student sulla differenza delle medie ottenute da ciascuna delle classi, osservando se vi fossero differenze significative nei diversi livelli di apprendimento ottenuti. La stessa analisi è stata condotta al fine di controllare la seconda ipotesi, raggruppando in questo caso terze e quarte (sottoposte a unità di apprendimento in ordine differente) al fine di aumentare la significatività, dal momento che le interviste semistrutturate di classe non hanno mostrato differenze negli orientamenti espressi dai bambini. Si è deciso di specificare le analisi per le due diverse quarte coinvolte dallo studio dal momento che mostravano differenze significative. Per quanto invece riguarda la terza ipotesi, le terze e le quarte sono state nuovamente raggruppate, dati gli elevati livelli di ansia mostrati da ogni classe nei risultati del test ME-MA ed è stato quindi condotto un test t di Student sulle differenze tra le medie ottenute.

6 | Risultati

Al fine di mantenere l'anonimato dei dati, saranno riportate solo le classi e le sezioni: IIIA, IIIB, IIIC, IIID, IVA e IVB, in modo da poter comprendere a chi si riferiscono i risultati senza permettere di risalire ai singoli partecipanti.

6.1 Fase preliminare

Dall'intervista semi strutturata rivolta alle insegnanti sono emersi alcuni risultati di interesse:

- **Assetto dell'aula:** la disposizione dei banchi risulta nel 50% dei casi a isola (IIIB, IVA, IVB) e nell'altro 50% frontale (IIIA, IIIC, IIID), posizione che viene in tutti i casi modificata (a isole o ferro di cavallo) per agevolare le attività in grande o piccolo gruppo;

- **Strumenti utilizzati:** oltre a materiale comunemente utilizzato a scuola (quali quaderni, libri, abachi, lavagne, materiali da disegno e/o per la misurazione quali righelli, metri, goniometri, squadre compassi), vengono elencati dalle insegnanti anche la tavola pitagorica, il tangram, i pentamini di Golomb, la linea del 20 e l'armadio di Bortolato, i blocchi logici e i blocchi aritmetici multibase di Dienes, oltre a materiale didattico strutturato (ad esempio per la presentazione analogica della quantità) o non strutturato (come ad esempio corde, tovaglioli o giornali utilizzati per lavorare sulle frazioni o in geometria per individuare angoli, diagonali, altezze, ecc.);

- **Approccio dell'insegnante**: per definire se ciascuna docente si avvicinasse maggiormente a un approccio trasmissivo, costruttivista o enat-

	I	II	III	IV
Classi Terze	Insegnante	Learning by doing (with manipulatives)	Inquiry based learning	Spaced learning
Classi Quarte	Insegnante	Inquiry based learning	Learning by doing (with manipulatives)	Spaced learning

Tabella 6.1: Ordine temporale delle tecniche indagate nelle diverse classi.

tivo, è stata utilizzata la tecnica dell'analisi di contenuto e in particolare gli indici di riferimento individuati da Coin (2016).

6.2 Fase di sperimentazione didattica

Il disegno di ricerca iniziale, di natura within subjects, è stato mantenuto, pur lasciando alle insegnanti la libertà di scegliere quali unità di apprendimento progettare con ciascuna delle tecniche. Al fine di fornire una maggiore chiarezza, si inserisce la tabella 6.1, in cui sono riportate le tecniche utilizzate in aula in ordine cronologico:

Di seguito vengono sinteticamente riportati i risultati emersi dalla ripetizione dei test AC-MT aggregati per anno (terze e quarte) ottenuti per ciascuna delle variabili e delle microvariabili dell'abilità di calcolo considerate:

6.2.1 Risultati AC-MT classi quarte

Sono state prese in esame le seguenti variabili dell'abilità di calcolo: operazioni scritte in classe, conoscenza numerica (risposte corrette), accuratezza (errori) e tempo totale. Di seguito sono riportati i risultati ottenuti ai cinque time points (precedentemente e successivamente a ogni unità di apprendimento). Come mostrato nella tabella 6.2

Per quanto invece riguarda le micro variabili delle abilità di calcolo, sono state considerate: trasformazione in cifre, ordinamento, calcolo a mente (tempo), calcolo scritto (tempo), enumerazione (tempo), fatti numerici (errori). Visibile nella tabella 6.3

(a) *Classe 3A*

(b) *Classe 3B*

(c) *Classe 3C*

(d) *Classe 3D*

(e) *Classi 4A-4B*

Figura 6.1

	Media (±SE) tempo 1	Media (±SE) tempo 2	Media (±SE) tempo 3	Media (±SE) tempo 4	Media (±SE) tempo 5	Dati normativi quarta iniziale (± DS)	Dati normativi quarta finale (± DS)
Operazioni scritte in classe	4,96 (±0,29)	5,91 (±0,25)	5,35 (±0,30)	6,00 (±0,27)	6,45 (±0,22)	6,24 (±1,63)	6,66 (±1,38)
Conoscenza numerica (risposte corrette)	17,71 (±0,36)	17,85 (±0,40)	18,26 (±0,38)	18,91 (±0,46)	19,66 (±0,39)	18,34 (±3,19)	18,24 (±3,28)
Accuratezza (errori)	9,80 (±0,89)	6,37 (±0,68)	11,31 (±5,47)	6,26 (±0,72)	5,72 (±0,76)	6,38 (±4,94)	5,59 (±4,18)
Tempo totale	159,45 (±7,00)	131,33 (±7,70)	124,80 (±4,72)	199,21 (±5,19)	199,43 (±3,10	117,54 (±32,68)	129,2 (±47,7)

Tabella 6.2

	Media (±SE) tempo 1	**Media (±SE) tempo 2**	**Media (±SE) tempo 3**	**Media (±SE) tempo 4**	**Media (±SE) tempo 5**	**Dati normativi quarta iniziale (± DS)**	**Dati normativi quarta finale (± DS)**
Trasformazione in cifre	4,04 (±0,16)	4,23 (±0,15)	4,35 (±0,15)	4,91 (±0,18)	5,13 (±0,16)	4,66 (±1,2)	4,51 (±1,5)
Ordinamento	8,07 (±0,25)	7,72 (±0,29)	9,67 (±1,50)	8,33 (±0,25)	8,68 (±0,24)	8,39 (±15,86)	8,44 (±1,9)
Calcolo a mente (tempo)	49,2 (±3,75)	35,4 (±2,99)	31,5 (±2,29)	32,9 (±4,52)	30,7 (±2,41)	45,07 (±1,31)	50,84 (±32,1)
Calcolo scritto (tempo)	52,51 (±3,75)	41,00 (±3,20)	40,57 (±3,02)	31,93 (±2,16)	31,59 (±2,27)	22,40 (±8,25)	20,64 (±12,87)
Enumerazione (tempo)	59,30 (±3,19)	54,29 (±3,14)	53,74 (±2,58)	51,62 (±2,27)	51,35 (±2,47)	50,64 (±9,28)	57,92 (±18,47)
Fatti numerici (tempo)	3,91 (±0,43)	2,70 (±0,36)	2,33 (±0,29)	2,38 (±0,32)	2,50 (±0,33)	3,20 (±2,37)	3,22 (±2,52)

Tabella 6.3

6.2.2 Risultati AC-MT classi terze

Considerata la somministrazione del test carta e matita, sono state prese in esame le seguenti variabili dell'abilità di calcolo: operazioni scritte in classe e conoscenza numerica (risposte corrette) (tabella 6.4).

Le micro variabili delle abilità di calcolo prese in esame sono: trasformazione in cifre e ordinamento (tabella 6.5).

6.2.3 Risultati interviste semistrutturate di classe

Dalle interviste semistrutturate condotte con tutti gli alunni di ciascuna classe al termine di goni unità di apprendimento, è emerso come tutte le classi siano accomunate da un orientamento rivolto all'approccio costruttivista ed enattivo.

6.3 Fase di approfondimento

6.3.1 Embedded Figures test

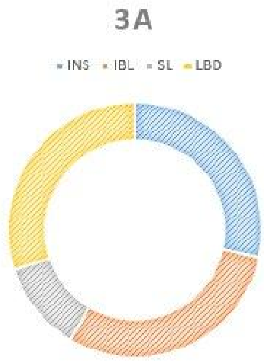
Per quanto riguarda l'Embedded Figures Test, i risultati emersi mostrano un discostamento negativo dalle medie di riferimento, soprattutto per quanto riguarda le terze (tabella 6.6):

	Media (±SE) tempo 1	**Media (±SE) tempo 2**	**Media (±SE) tempo 3**	**Media (±SE) tempo 4**	**Media (±SE) tempo 5**	**Dati normativi terza iniziale (± DS)**	**Dati normativi terza finale (± DS)**
Operazioni scritte in classe	2,53 (±0,17)	2,85 (±0,19)	3,05 (±0,20)	3,75 (±0,21)	3,88 (±0,23)	5,39 (±1,92)	6,63 (±1,6)
Conoscenza numerica (risposte corrette)	18,80 (±0,44)	18,78 (±0,47)	19,43 (±0,38)	19,75 (±0,33)	19,74 (±0,40)	19,79 (±3,34)	19,89 (±3,28)

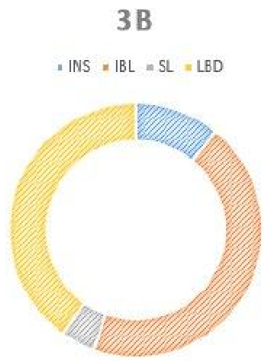
Tabella 6.4

	Media (±SE) tempo 1	**Media (±SE) tempo 2**	**Media (±SE) tempo 3**	**Media (±SE) tempo 4**	**Media (±SE) tempo 5**	**Dati normativi quarta iniziale (± DS)**	**Dati normativi quarta finale (± DS)**
Trasformazione in cifre	4,82 (±0,19)	4,88 (±0,21)	5,18 (±0,18)	5,31 (±0,15)	5,20 (±0,17)	5,62 (±0,98)	5,57 (±1,13)
Ordinamento	8,56 (±0,24)	8,44 (±0,25)	8,58 (±0,24)	8,75 (±0,21)	8,94 (±0,22)	9,6 (±1,06)	9,41 (±1,26)

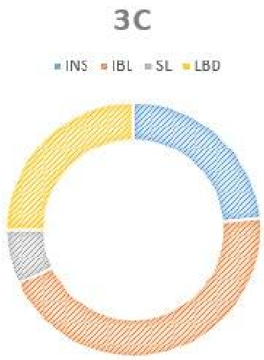
Tabella 6.5



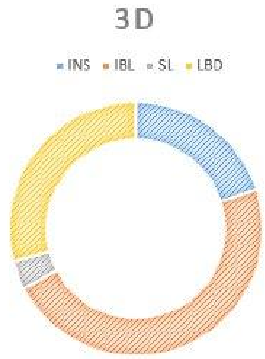
(a) *Classe 3A*



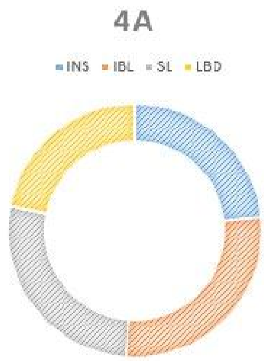
(b) *Classe 3B*



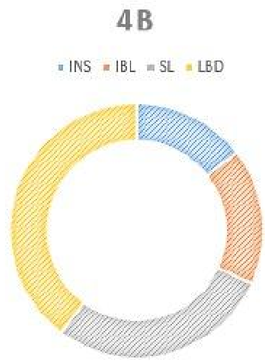
(c) *Classe 3C*



(d) *Classe 3D*

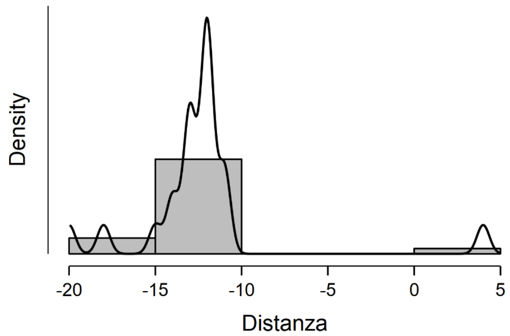


(e) *Classe 4A*

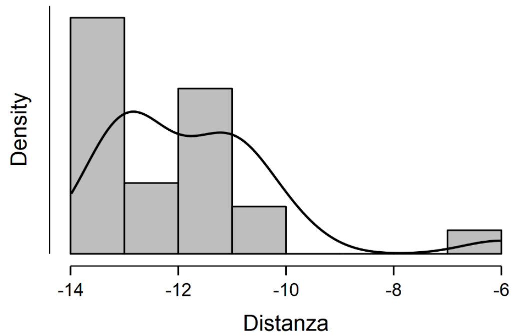


(f) *Classe 4B*

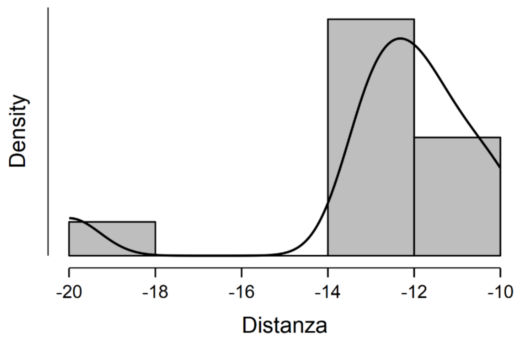
Figura 6.2



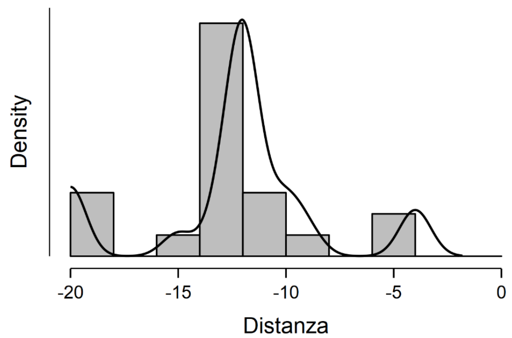
(a) *Classe 3A*



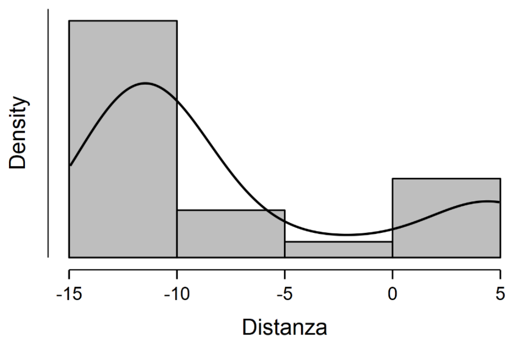
(b) *Classe 3B*



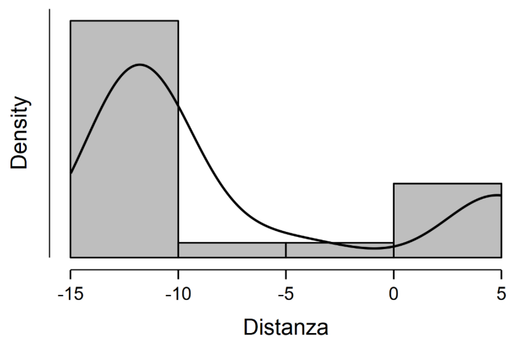
(c) *Classe 3C*



(d) *Classe 3D*



(e) *Classe 4A*



(f) *Classe 4B*

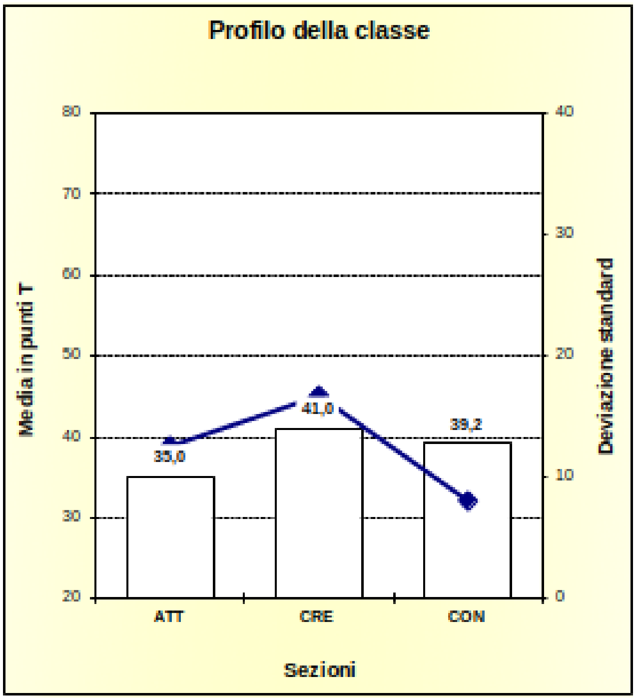
Figura 6.3

	Distanza					
	3A	**3B**	**3C**	**3D**	**4A**	**4B**
Validi	22	23	23	21	24	23
Media	-12.318	-11.739	-12.565	-12.238	-7.375	-7.652
Errore standard della media	0.905	0.351	0.533	0.910	1.389	1.459

Tabella 6.6: Distanza dalle medie di riferimento.

6.3.2 Test ME-MA

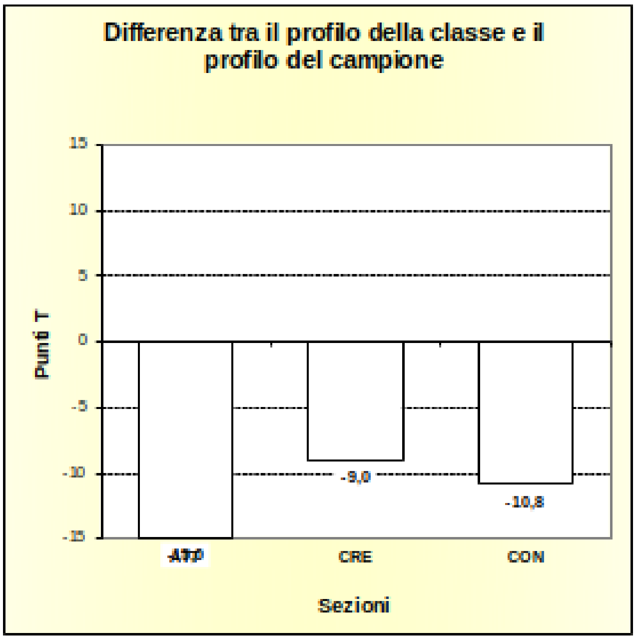
Profilo della classe IIIA



Studenti che hanno eseguito il questionario: 21

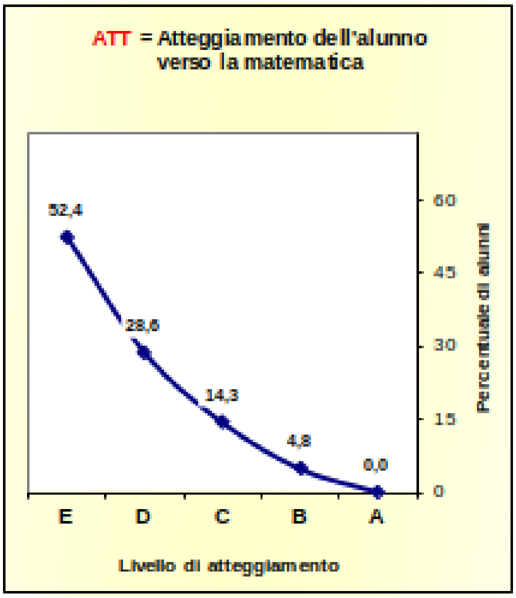
Legenda sezioni

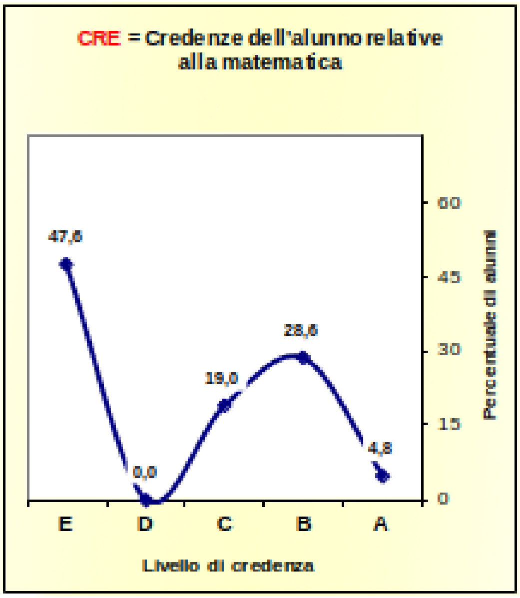
ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi

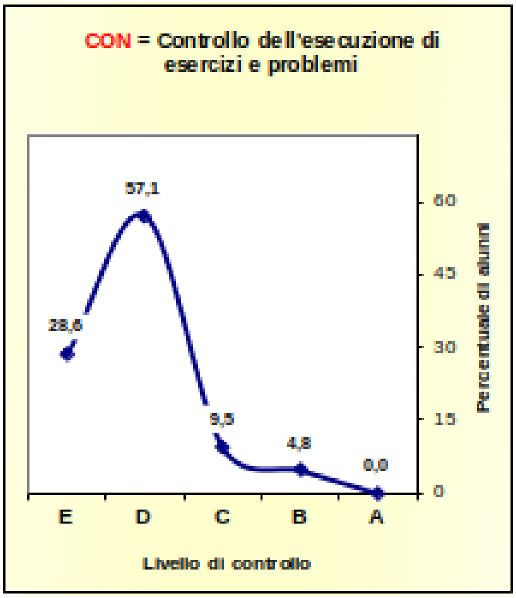


Il grafico a fianco (**Differenza tra il profilo della classe e il profilo del campione**) presenta in modo diverso alcune delle informazioni già contenute nel grafico precedente (**Profilo della classe**). In sostanza, vengono evidenziate le differenze tra la situazione della classe e del campione normativo, così da permettere ai docenti di individuare immediatamente i punti di forza e di miglioramento del profilo. Il punto T 0 rappresenta il punteggio medio (50 punti T) del campione normativo.

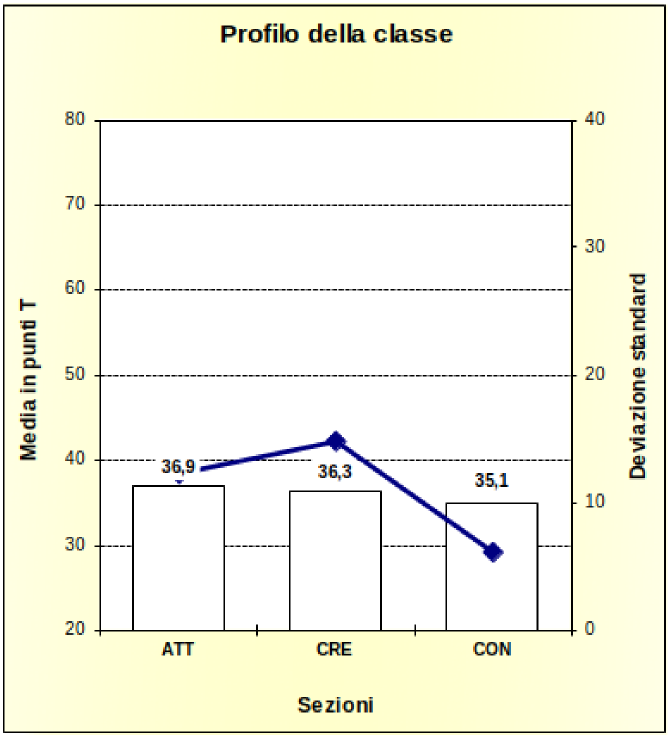
Per interpretare i dati, può essere utile ricordare che una differenza tra i punteggi pari a una deviazione standard (10 punti T) è una differenza sostanziale.


ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
52,4
28,6
14,3
4,8
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di atteggiamento


CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
47,6
0,0
19,0
28,6
4,8
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di credenza


CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi
28,6
57,1
9,5
4,8
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di controllo

Profilo della classe IIIB



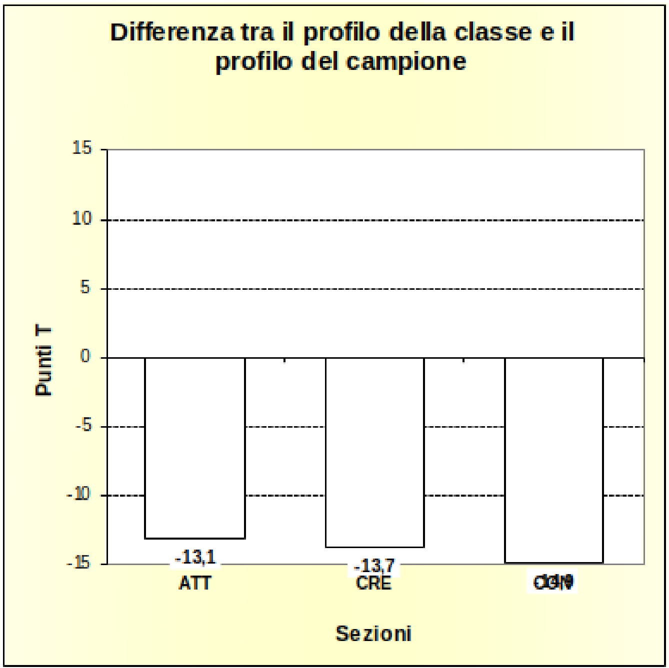
Studenti che hanno eseguito il questionario | 22

Legenda sezioni

ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica

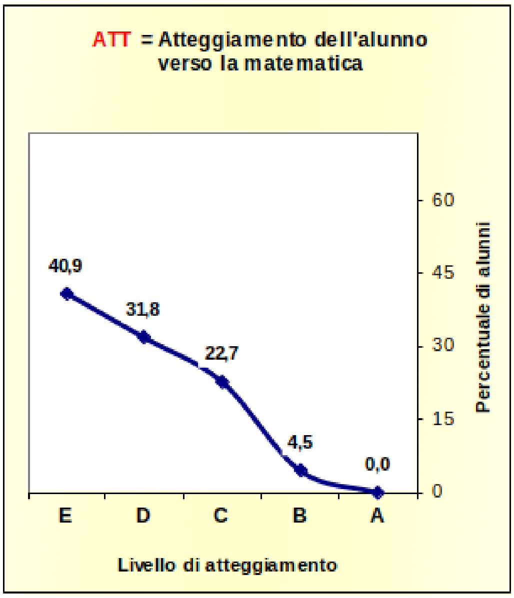
CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica

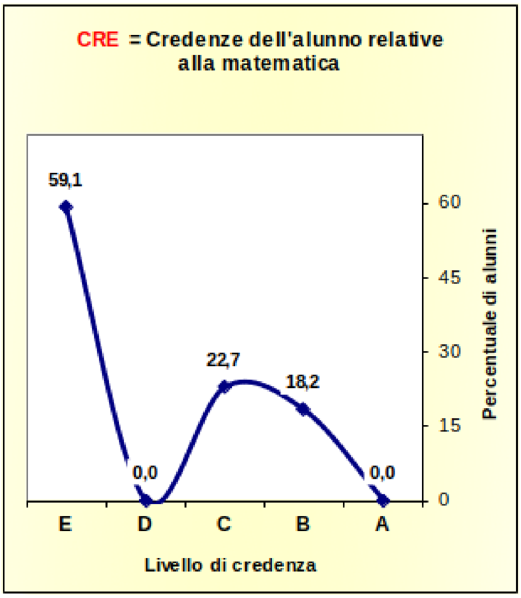
CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi

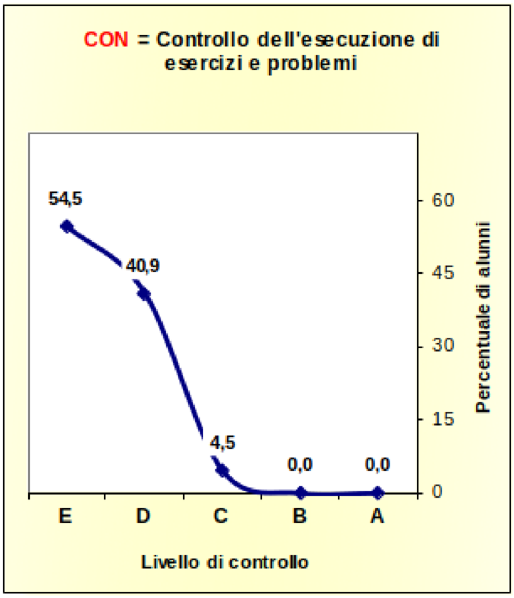


Il grafico a fianco (**Differenza tra il profilo della classe e il profilo del campione**) presenta in modo diverso alcune delle informazioni già contenute nel grafico precedente (**Profilo della classe**). In sostanza, vengono evidenziate le differenze tra la situazione della classe e del campione normativo, così da permettere ai docenti di individuare immediatamente i punti di forza e di miglioramento del profilo. Il punto T 0 rappresenta il punteggio medio (50 punti T) del campione normativo.

Per interpretare i dati, può essere utile ricordare che una differenza tra i punteggi pari a una deviazione standard (10 punti T) è una differenza sostanziale.

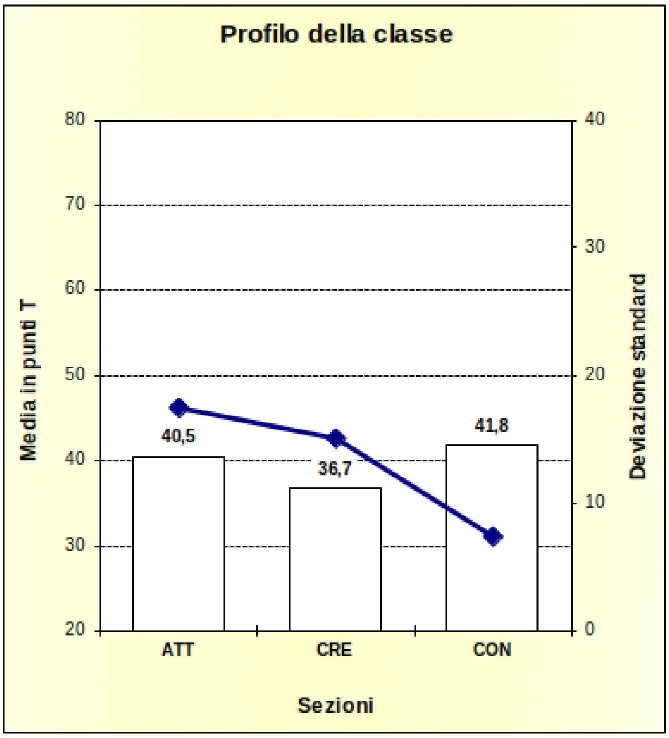

ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
40,9
31,8
22,7
4,5
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di atteggiamento


CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
59,1
0,0
22,7
18,2
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di credenza


CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi
54,5
40,9
4,5
0,0
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di controllo

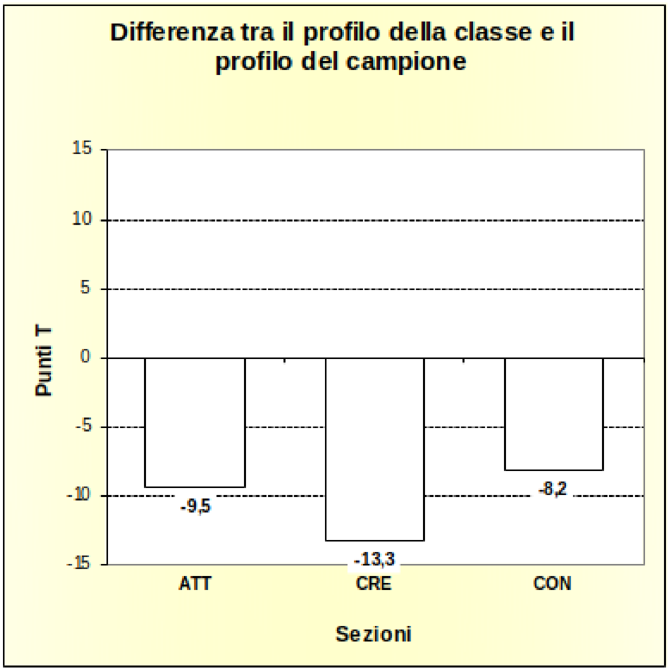
Profilo della classe IIIC

Studenti che hanno eseguito il questionario **23**



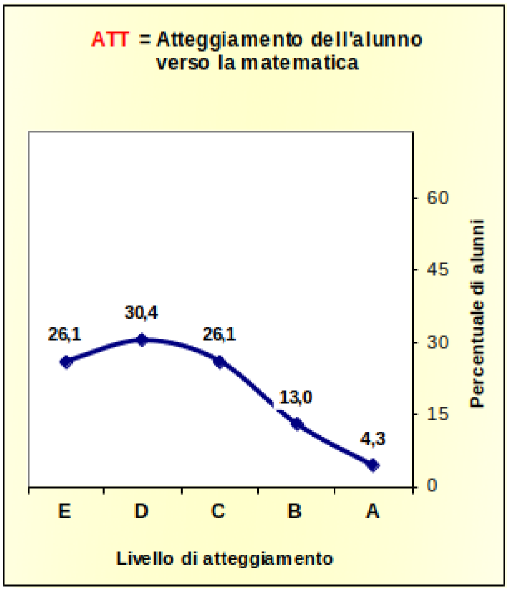
Legenda sezioni

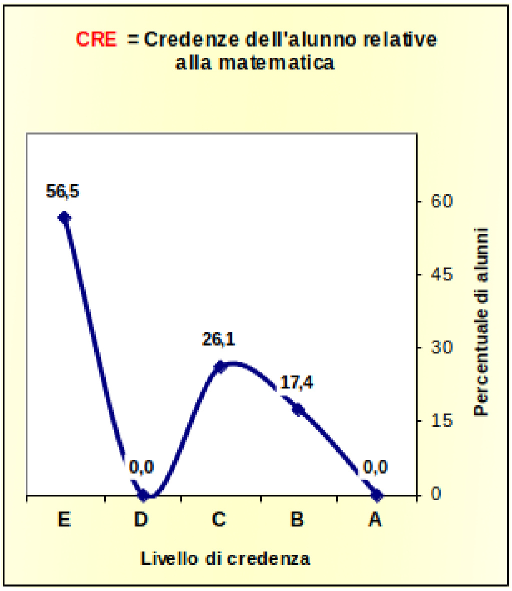
ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi

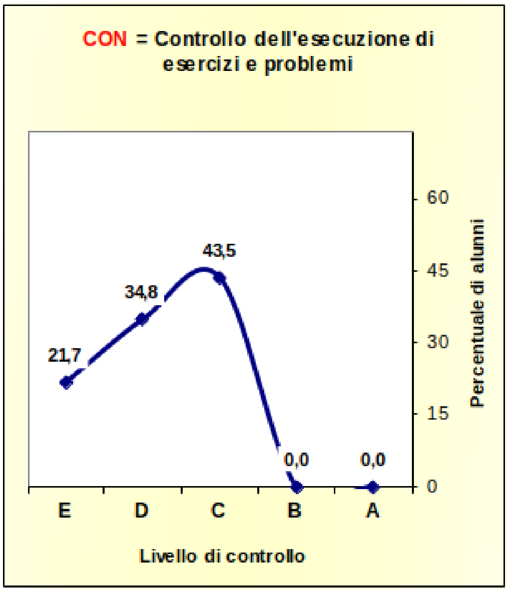


Il grafico a fianco (**Differenza tra il profilo della classe e il profilo del campione**) presenta in modo diverso alcune delle informazioni già contenute nel grafico precedente (**Profilo della classe**). In sostanza, vengono evidenziate le differenze tra la situazione della classe e del campione normativo, così da permettere ai docenti di individuare immediatamente i punti di forza e di miglioramento del profilo. Il punto T 0 rappresenta il punteggio medio (50 punti T) del campione normativo.

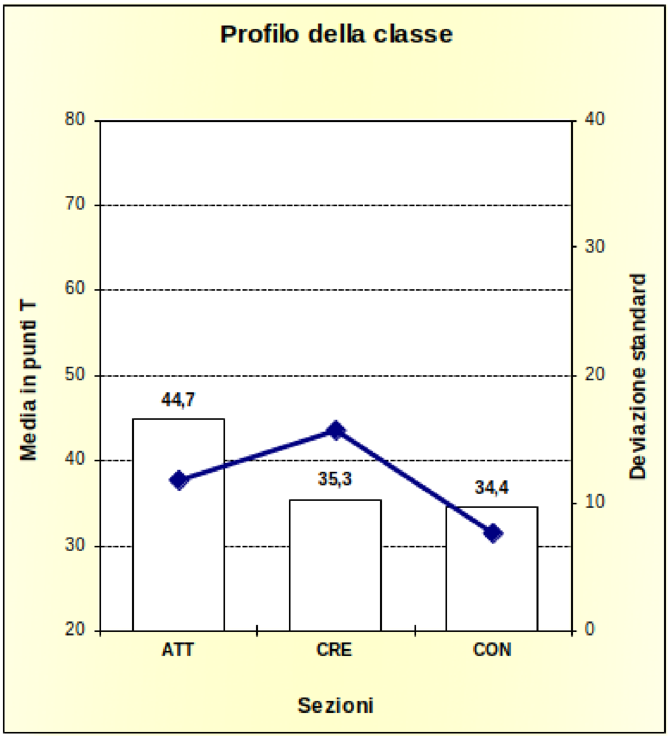
Per interpretare i dati, può essere utile ricordare che una differenza tra i punteggi pari a una deviazione standard (10 punti T) è una differenza sostanziale.


ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
26,1
30,4
26,1
13,0
4,3
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E D C B A
Livello di atteggiamento


CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
56,5
0,0
26,1
17,4
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E D C B A
Livello di credenza

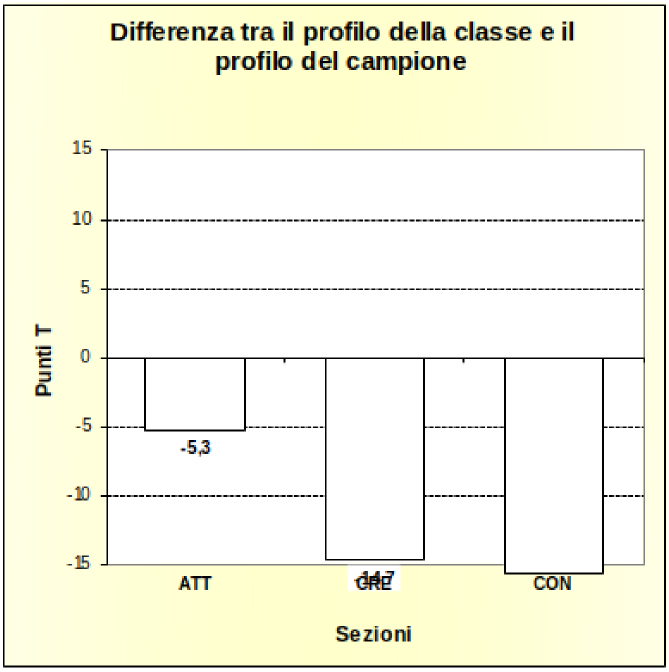

CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi
21,7
34,8
43,5
0,0
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E D C B A
Livello di controllo

Profilo della classe IIID



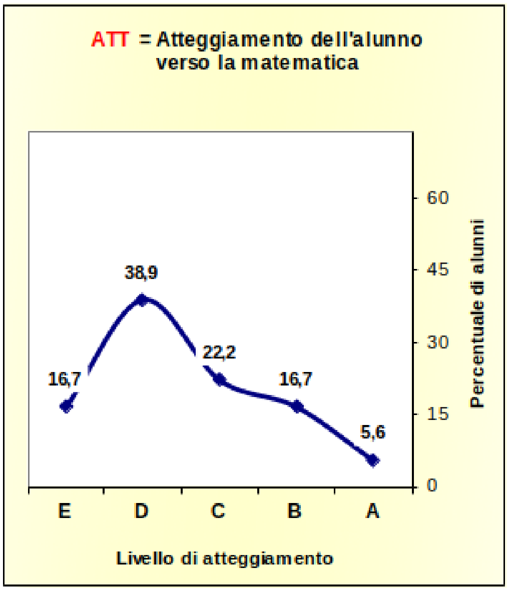
Studenti che hanno eseguito il questionario: 18

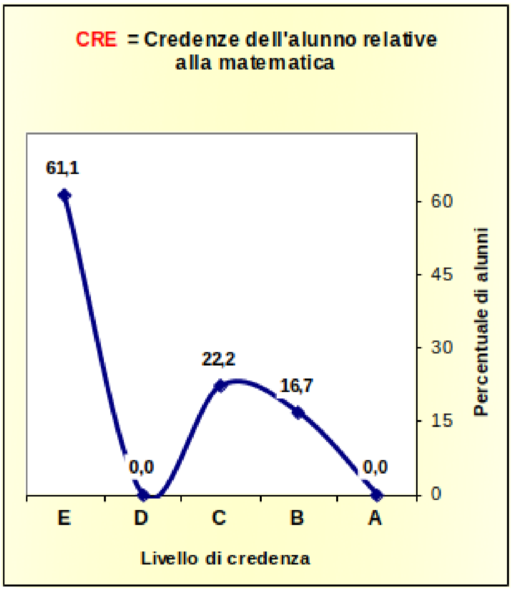
Legenda sezioni
ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi

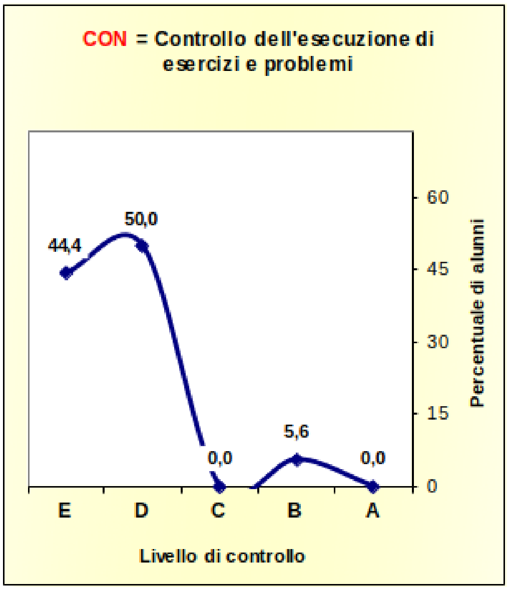


Il grafico a fianco (**Differenza tra il profilo della classe e il profilo del campione**) presenta in modo diverso alcune delle informazioni già contenute nel grafico precedente (**Profilo della classe**). In sostanza, vengono evidenziate le differenze tra la situazione della classe e del campione normativo, così da permettere ai docenti di individuare immediatamente i punti di forza e di miglioramento del profilo. Il punto T 0 rappresenta il punteggio medio (50 punti T) del campione normativo.

Per interpretare i dati, può essere utile ricordare che una differenza tra i punteggi pari a una deviazione standard (10 punti T) è una differenza sostanziale.

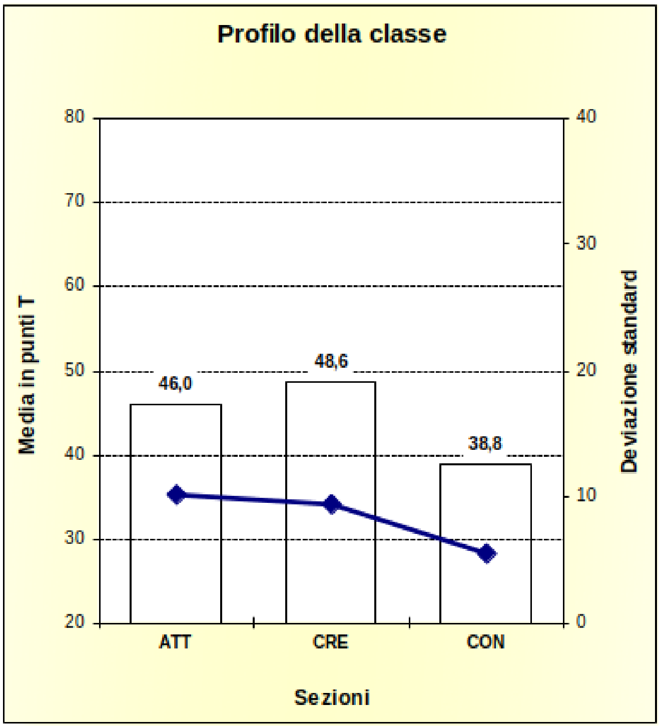

ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
38,9
16,7
22,2
16,7
5,6
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di atteggiamento


CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
61,1
0,0
22,2
16,7
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di credenza


CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi
44,4
50,0
0,0
5,6
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di controllo

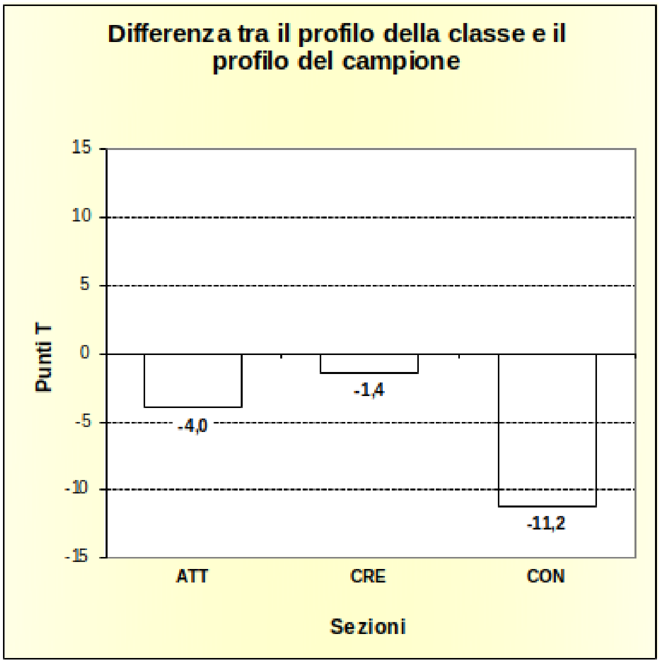
Profilo della classe IVA:

Studenti che hanno eseguito il questionario: 24



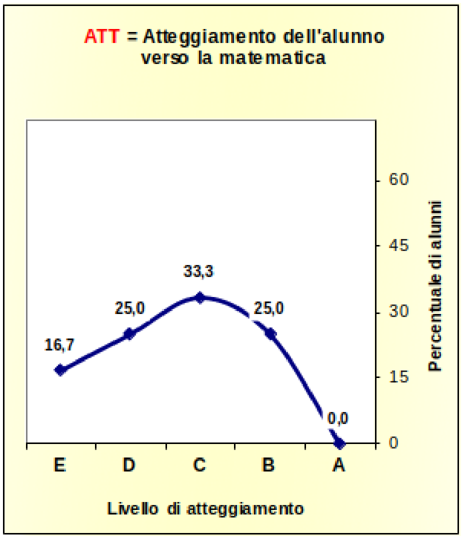
Legenda sezioni

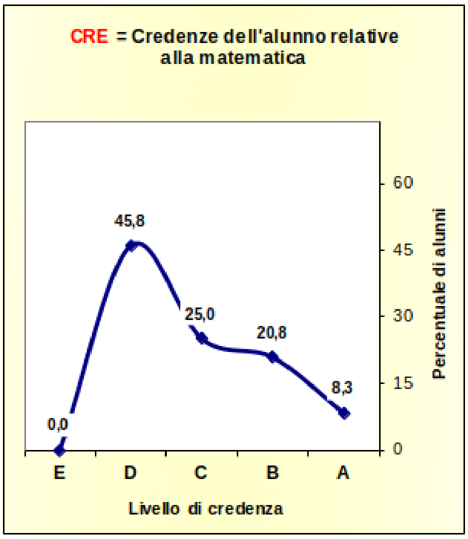
ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi

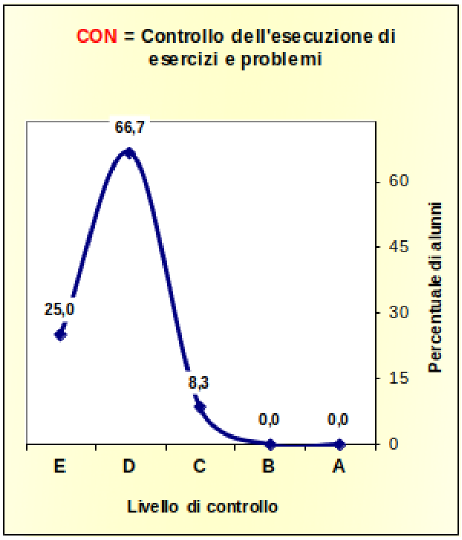


Il grafico a fianco (**Differenza tra il profilo della classe e il profilo del campione**) presenta in modo diverso alcune delle informazioni già contenute nel grafico precedente (**Profilo della classe**). In sostanza, vengono evidenziate le differenze tra la situazione della classe e del campione normativo, così da permettere ai docenti di individuare immediatamente i punti di forza e di miglioramento del profilo. Il punto T 0 rappresenta il punteggio medio (50 punti T) del campione normativo.

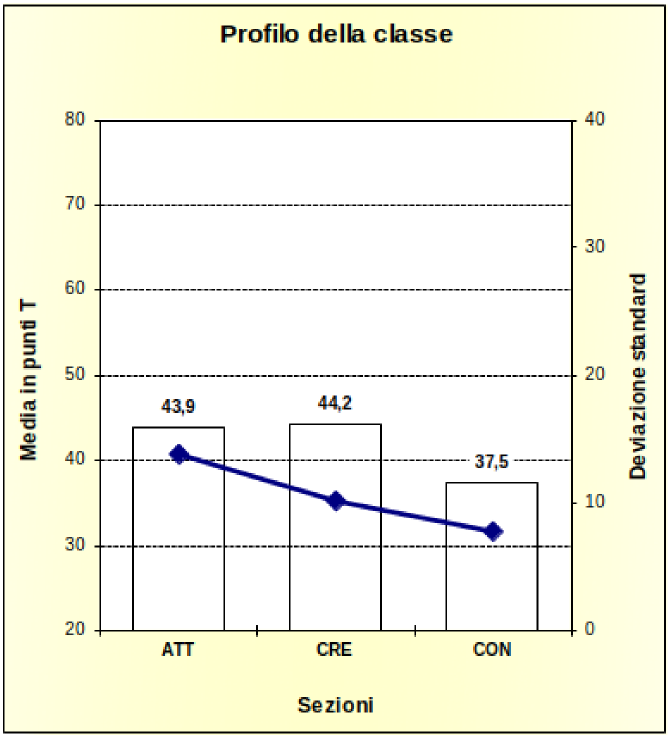
Per interpretare i dati, può essere utile ricordare che una differenza tra i punteggi pari a una deviazione standard (10 punti T) è una differenza sostanziale.


ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
16,7
25,0
33,3
25,0
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di atteggiamento


CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
0,0
45,8
25,0
20,8
8,3
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di credenza

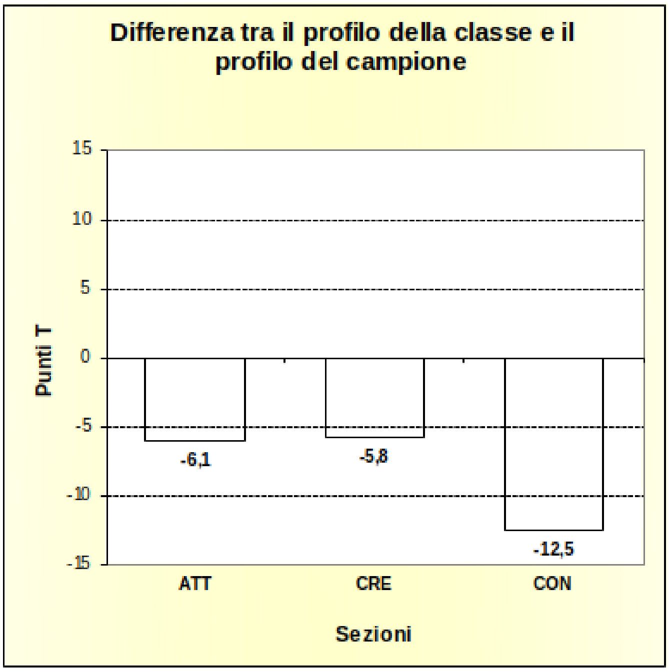

CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi
25,0
66,7
8,3
0,0
0,0
60
45
30
15
0
Percentuale di alunni
E
D
C
B
A
Livello di controllo

Profilo della classe IVB:



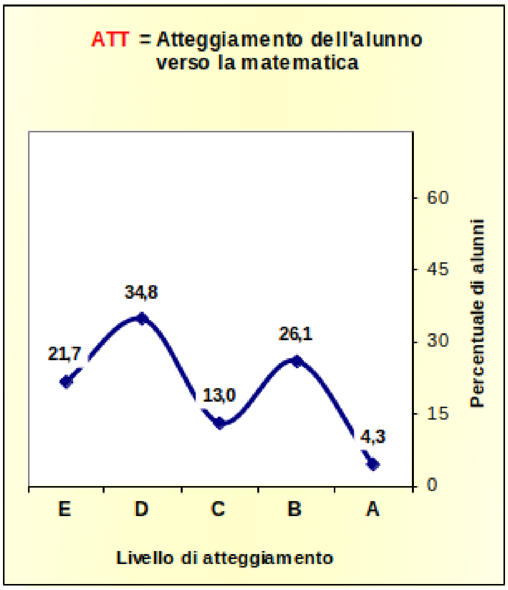
Studenti che hanno eseguito il questionario	23

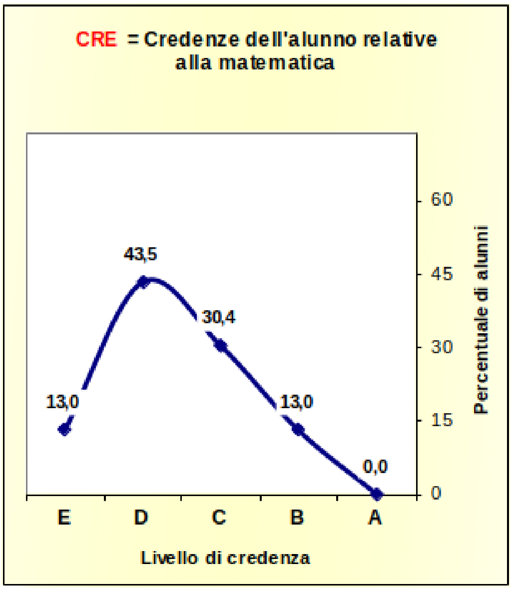
Legenda sezioni
ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi

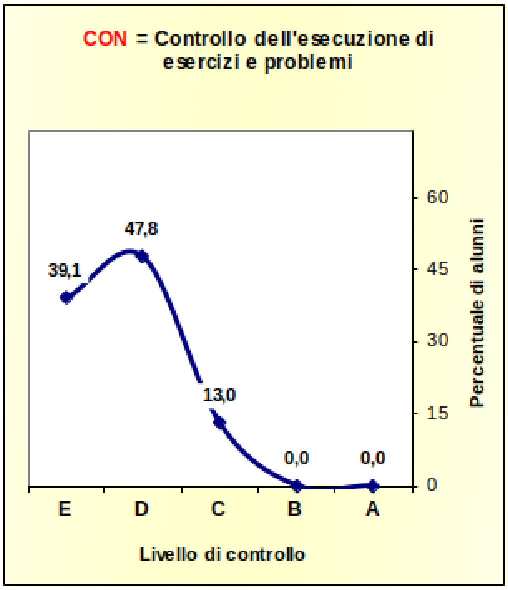


Il grafico a fianco (**Differenza tra il profilo della classe e il profilo del campione**) presenta in modo diverso alcune delle informazioni già contenute nel grafico precedente (**Profilo della classe**). In sostanza, vengono evidenziate le differenze tra la situazione della classe e del campione normativo, così da permettere ai docenti di individuare immediatamente i punti di forza e di miglioramento del profilo. Il punto T 0 rappresenta il punteggio medio (50 punti T) del campione normativo.

Per interpretare i dati, può essere utile ricordare che una differenza tra i punteggi pari a una deviazione standard (10 punti T) è una differenza sostanziale.


ATT = Atteggiamento dell'alunno verso la matematica
Percentuale di alunni
60
45
30
15
0
21,7
34,8
13,0
26,1
4,3
E
D
C
B
A
Livello di atteggiamento


CRE = Credenze dell'alunno relative alla matematica
Percentuale di alunni
60
45
30
15
0
13,0
43,5
30,4
13,0
0,0
E
D
C
B
A
Livello di credenza


CON = Controllo dell'esecuzione di esercizi e problemi
Percentuale di alunni
60
45
30
15
0
39,1
47,8
13,0
0,0
0,0
E
D
C
B
A
Livello di controllo

6.4 Confronto tra i risultati ottenuti

6.4.1 Ipotesi 1

Di seguito si riportano i risultati ottenuti eseguendo i test T di Student, confrontando le differenze tra le medie dei punteggi raggiunti da ogni classe. I punteggi fanno riferimento all' abilità matematica in generale e sono stati raccolti precedentemente e successivamente a ogni unità di apprendimento.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 2-1	-	MEDIA 5-4	0.130	16	0.898	0.031
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-1.550	16	0.141	-0.376
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	1.604	17	0.127	0.378
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	0.565	18	0.579	0.130
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	-1.817	16	0.088	-0.441
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	-1.942	16	0.070	-0.471

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.7: Terza A.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 2-1	-	MEDIA 5-4	-2.080	19	0.051	-0.465
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	1.966	21	0.063	0.419
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	-2.275	21	0.034	-0.485
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	-2.199	20	0.040	-0.480
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	0.249	20	0.806	0.054
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	3.062	22	0.006	0.638

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.8: Terza B.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 2-1	-	MEDIA 5-4	0.823	15	0.424	0.206
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	2.575	18	0.019	0.591
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	2.162	18	0.044	0.496
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	0.000	15	1.000	0.000
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	-0.456	15	0.655	-0.114
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	1.534	20	0.141	0.335

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.9: Terza C.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 2-1	-	MEDIA 5-4	0.243	15	0.812	0.061
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	1.562	17	0.137	0.368
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	1.189	17	0.251	0.280
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	0.232	14	0.820	0.060
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	-0.134	14	0.895	-0.035
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	1.416	17	0.175	0.334

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.10: Terza D.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 2-1	-	MEDIA 5-4	-1.020	21	0.319	-0.217
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-0.471	21	0.642	-0.101
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	-0.191	21	0.850	-0.041
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	-0.285	20	0.778	-0.062
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	-0.530	20	0.602	-0.116
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	-0.052	21	0.959	-0.011

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.11: Quarta A.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 2-1	-	MEDIA 5-4	-0.223	22	0.826	-0.046
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-1.839	22	0.079	-0.383
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	0.052	22	0.959	0.011
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	1.224	22	0.234	0.255
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	-0.293	22	0.772	-0.061
MEDIA 3-2	-	MEDIA 4-3	-1.717	22	0.100	-0.358

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.12: Quarta B.

6.4.2 Ipotesi 2

Si riportano i risultati accorpati per le classi terze e quarte (tabelle 6.13-6.14-6.15-6.16), dal momento che le tecniche didattiche sono state presentate nello stesso ordine per il medesimo anno scolastico. Tuttavia, data l'eterogeneità dei risultati ottenuti nelle quarte, si è preferito riportare anche le singole sezioni.

Tali risultati fanno riferimento alle differenze ottenute tra la differenza delle medie dei punteggi pre e post le tecniche enattive e costruttiviste (tra le rilevazioni 2 e 3, 3 e 4) e la tecnica trasmissiva (tra le rilevazioni 4 e 5). Nel dettaglio, in terza tra le rilevazioni 2 e 3 è stato proposto il learning by doing, e tra le rilevazioni 3 e 4 l'apprendimento per scoperta, mentre in quarta tra le rilevazioni 2 e 3 è stato utilizzato l'apprendimento per scoperta e tra le rilevazioni 3 e 4 il learning by doing.

			t	df	p	Cohen's d	95% CI for Cohen's d Lower	Upper
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	2.990	75	0.002	0.343	0.148	∞
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	1.042	76	0.150	0.119	-0.070	∞

Note. Student's t-test.
Note. All tests, hypothesis is measurement one greater than measurement two.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.13: Terze.

			t	df	p	Cohen's d	95% CI for Cohen's d Lower	Upper
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-1.779	44	0.959	-0.265	-0.513	∞
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	-0.106	44	0.542	-0.016	-0.261	∞

Note. Student's t-test.
Note. All tests, hypothesis is measurement one greater than measurement two.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.14: Quarte.

			t	df	p	Cohen's d	95% CI for Cohen's d Lower	Upper
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-0.471	21	0.679	-0.101	-0.451	∞
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	-0.191	21	0.575	-0.041	-0.391	∞

Note. Student's t-test.
Note. All tests, hypothesis is measurement one greater than measurement two.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.15: Quarta A.

			t	df	p	Cohen's d	95% CI for Cohen's d Lower	Upper
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-1.839	22	0.960	-0.383		
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	0.052	22	0.480	0.011		

Note. Student's t-test.
Note. All tests, hypothesis is measurement one greater than measurement two.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.16: Quarta B.

6.4.3 Ipotesi 3

Si è preferito tenere accorpare le classi terze e quarte, dal momento che non vi sono differenze significative e ciò ha permesso di aumentare il campione.

Sono state quindi confrontate le differenze delle medie ottenute (tabelle 6.17-6.18), comparando tutte le tecniche didattiche proposte, inclusa quella dell'insegnante.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	1.042	76	0.301	0.119
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	1.042	76	0.301	0.119
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	2.990	75	0.004	0.343
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	-1.277	68	0.206	-0.154
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	-1.115	70	0.268	-0.132

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.17: Terze.

			t	df	p	Cohen's d
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	-0.106	44	0.916	-0.016
MEDIA 4-3	-	MEDIA 5-4	-0.106	44	0.916	-0.016
MEDIA 3-2	-	MEDIA 5-4	-1.779	44	0.082	-0.265
MEDIA 2-1	-	MEDIA 3-2	0.792	43	0.433	0.119
MEDIA 2-1	-	MEDIA 4-3	-0.600	43	0.552	-0.090

Note. Student's t-test.
Note. Paired Samples T-Test.

Tabella 6.18: Quarte.

7 | Discussione

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è quello di quello di ricercare le possibili interazioni tra l'applicazione di tecniche didattiche sostenute da un consolidato fondamento teorico in Didattica della Matematica e la tecnica didattica elaborata da ciascun insegnante. Si intende cioè studiare se vi siano differenze nell'apprendimento da parte degli studenti delle classi in cui l'insegnante abbia un orientamento in linea o in contrasto con la tecnica proposta e quali influenze abbiano su questi processi l'ansia matematica e l'orientamento degli alunni. L'approccio adottato è quello della scienza *mente, cervello e didattica della matematica*.

7.1 Prima ipotesi

La prima ipotesi riguarda la correlazione tra l'orientamento metodologico dell'insegnante e i risultati raggiunti dagli studenti con le tecniche didattiche afferenti al medesimo orientamento. Ci si aspetta che l'assonanza didattica abbia benefici sull'apprendimento, con un incremento delle abilità matematiche ottenute dagli alunni.

In sintesi, la prima ipotesi è stata confermata dai dati raccolti, che tuttavia hanno evidenziato come tra i fattori di influenza rientrino la metacognizione, le capacità degli alunni di lavorare in gruppo e il progressivo venir meno della necessità di manipulatives durante la scuola primaria, tutti elementi che saranno di seguito illustrati nel dettaglio. Come infatti visibile nel grafico sottostante (che non riporta le differenze significative, ma solo l'andamento generale delle classi con le quattro unità di apprendimento),

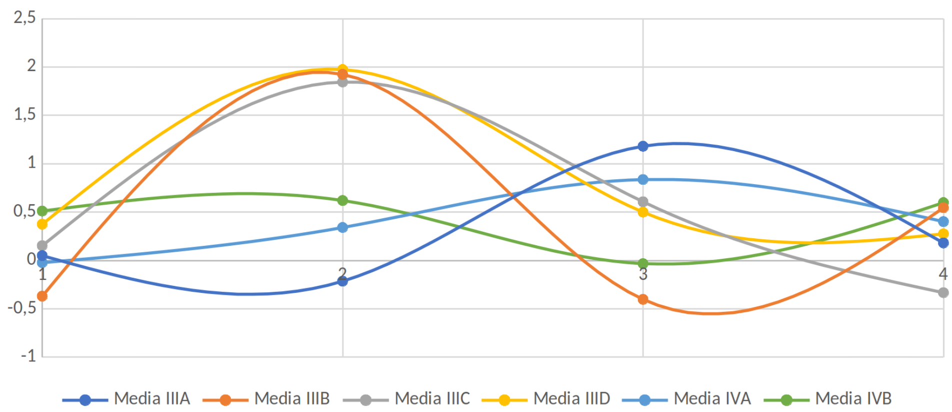


Figura 7.1: Andamento delle differenze tra le medie ottenute prima e dopo ciascuna unità di apprendimento (1 tecnica dell'insegnante, 2 LBD, 3 IBL, 4 AI).

in ciascuna delle classi terze, fatta eccezione per la IIIA, i risultati migliori sono ottenuti in seguito all'unità di apprendimento in cui è stato utilizzato il learning by doing con l'utilizzo di manipulatives, ovvero gli Artecblocks. Nelle classi quarte, invece, non vi sono tendenze comuni e, in entrambi i casi, il learning by doing non è la tecnica che presenta risultati maggiori. Ciò, secondo gli assunti di MCD, assume significato in quanto l'utilizzo di manipulatives si conferma come ponte tra l'oggetto matematico e il bambino, tanto più quanto il bambino stesso è dipendente da una manipolazione dell'oggetto (Montessori, 2013/1934). Le ricerche condotte a riguardo, hanno infatti trovato riscontri positivi sull'apprendimento soprattutto in età prescolare e nei primi anni di scuola primaria, mentre nelle ultime classi i benefici si riducono (Liggett, 2017; Evangelou & Kotsis, 2019).

In dettaglio, dai risultati emerge come, nella classe IIIA, l'insegnante presenti un orientamento costruttivista, che tuttavia non pare avere influenze sull'apprendimento. Non esistono infatti differenze significative tra l'apprendimento avvenuto durante le quattro unità di apprendimento proposte. Si nota tuttavia come l'apprendimento per scoperta, basata sul costruttivismo, sia la tecnica con esiti migliori per la classe. La mancata significatività può essere dovuta all'esiguità del campione. Resta tuttavia interessante notare come la tecnica che ha prodotto i risultati migliori in termini di apprendimento di abilità matematiche sia proprio quella in linea con l'orientamento espresso dall'insegnante.

In IIIB invece, l'insegnante esprime un orientamento enattivo e i risultati ottenuti dagli studenti nel test AC-MT mostrano differenze significative: la tecnica con maggior efficacia risulta essere il learning by doing con l'utilizzo di manipulatives (riconducibile alle teorie costruttiviste ed enattiviste; Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018), che è significativamente più efficace dell'apprendimento intervallato. Ciò trova fondamento nel fatto che quest'ultima tecnica è di stampo comportamentista (Kondratjew & Kahrens, 2019), in contrasto con l'orientamento mostrato dal docente. Si hanno differenze significative anche tra il learning by doing con l'utilizzo di manipulatives e l'apprendimento per scoperta e ciò aiuta a discriminare i risultati ottenuti: l'inquiry based learning fa riferimento alle teorie costruttiviste e socio-costruttiviste, mentre il learning by doing afferisce anche a quelle enattiviste (Blessinger & Carfora, 2015; Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018). Pare quindi essere questo il motivo per cui, in IIIB gli alunni mostrano un apprendimento maggiore proprio quando l'insegnante adotta una tecnica che si riferisce all'orientamento espresso. Interessante notare come l'adozione di una tecnica scientificamente fondata ottenga risultati, seppur non in maniera significativa, migliori anche dell'unità di apprendimento liberamente costruita dal docente. Tale risultato può essere spiegato in virtù del fatto che solitamente la pratica didattica porta i docenti a non adottare tecniche pure, ma piuttosto a utilizzare quanto a loro maggiormente favorevole nell'uno o nell'altro momento (Carletti & Varani, 2005).

Per quanto poi riguarda la IIIC, in cui l'insegnante di matematica risulta di orientamento costruttivista, emergono differenze significative tra apprendimento intervallato e rispettivamente learning by doing e apprendimento per scoperta. Il primo risulta apportare a risultati in termini di apprendimento significativamente inferiori, in linea con quanto ipotizzato: la tecnica di matrice comportamentista non ha affinità con il costruttivismo, mentre le tecniche significativamente più vantaggiosi si rifanno entrambe, in toto o in parte, alla teoria costruttivista (Blessinger & Carfora, 2015; Kondratjew & Kahrens, 2019; Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018).

Anche in IIID non si riscontrano differenze significative, ma data la limitatezza del campione questo non sorprende. In questo caso l'orientamento dell'insegnante è di tipo trasmissivo, tuttavia si rileva l'effetto maggiore ottenuto dal learning by doing, in contrasto con l'orientamento del docente. Tale risultato trova risonanza anche nell'intervista condotta in seguito alla proposizione dell'unità di apprendimento svolta con la tecnica dell'apprendimento intervallato, in cui i bambini hanno mostrato di ricordare poco quanto svolto nelle lezioni di matematica: "A: Allora, la maestra [...] mi ha detto che avete fatto delle lezioni con le pause [...] Vi ricordate questa cosa voi? B1: No. A: Nessuno? B2: Nessuno. B3: Non mi viene in mente nulla". Dal momento che vi è una correlazione tra metacognizione e accuratezza in campo matematico, tale risultato non sorprende (Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015). Si ipotizza di conseguenza che gli alunni hanno assistito alle lezioni in cui è stato adottato l'AI senza un profondo coinvolgimento, oltre che senza essere interessati da una riflessione circa i propri apprendimenti. Una ulteriore spiegazione potrebbe essere legata alla concordanza tra tecnica e orientamento del docente: di fatto, per gli studenti le lezioni non erano diverse da quanto fatto di solito e, per la loro percezione, non venivano "notate". Di conseguenza, da un lato i risultati in termini di abilità matematiche risultano inferiori alle aspettative, dall'altro i bambini paiono aver presto dimenticato quanto svolto in classe.

In IVA e IVB, essendo l'insegnante di matematica la medesima per entrambe le classi, l'orientamento mostrato è stato di tipo enattivo. Nonostante in entrambe le classi quarte vi sia assenza di differenze significative tra i risultati ottenuti al termine delle unità di apprendimento, la IVA mostra una tendenza migliore al termine dell'unità con apprendimento per scoperta, afferente al costruttivismo. Non vi sono pertanto dati a favore dell'ipotesi, per cui l'unità in cui è stato proposto il learning by doing non ha comportato risultati migliori. Ciò trova riscontro nelle interviste condotte con i bambini: al termine di tale unità essi affermano come il fatto di lavorare assieme abbia causato delle difficoltà gestionali e organizzative all'interno di alcuni gruppi sia in IVA "B: allora, come ha detto il Giulio nello scorso gruppo non siamo stati molto sincronizzati nel gruppo perché il Giulio voleva fare una cosa e io volevo farne un'altra e la Anna voleva farne un'altra e la Sara un'altra e allora", che in IVB "B1: Non mi trovavo bene col mio gruppo. [...] B2: A me è piaciuto lavorare solo che prima avevo fatto tutti i calcoli [...] Avevo fatto tutti i calcoli e quando abbiamo cominciato a lei non è interessato niente. B3: E' vero, alla Giorgia non interessa niente. B2: Lei dice che non lavoro in gruppo." (nomi di fantasia), oltre che essere risultato un distrattore laddove la funzionalità didattica viene meno, dal momento che negli ultimi anni di scuola primaria pare non essere più così necessario un supporto concreto, come emerge dall'intervista in IVA: "B1: a me i lavori per i cubetti mi sono piaciuti, solo che alcuni non resistono all'idea di giocare con i cubetti e fanno fare tutto agli altri. A: mentre giocano. B: eh, io sono stato in un gruppo dove c'era uno che giocava con i cubetti e lasciava fare tutto agli altri" così come in IVB: "Mi sono divertita, però a volte mi sono annoiata perché alcune cose per me erano troppo facili, tipo le equazioni e la maestra mentre spiegava io avevo risolto quasi tutto."

In conclusione, i dati emersi confermano la prima ipotesi, pur sottolineando fattori di influenza inizialmente non considerati dallo studio, quali le difficoltà riscontrare dai bambini nei lavori di gruppo, la diminuzione di necessità didattiche legate ai manipulatives e la metacognizione.

7.2 Seconda ipotesi

Tutte le classi coinvolte dallo studio hanno espresso, nelle interviste condotte, preferenza per il costruttivismo (IIIB, IIIC, IIID, IVA), o per

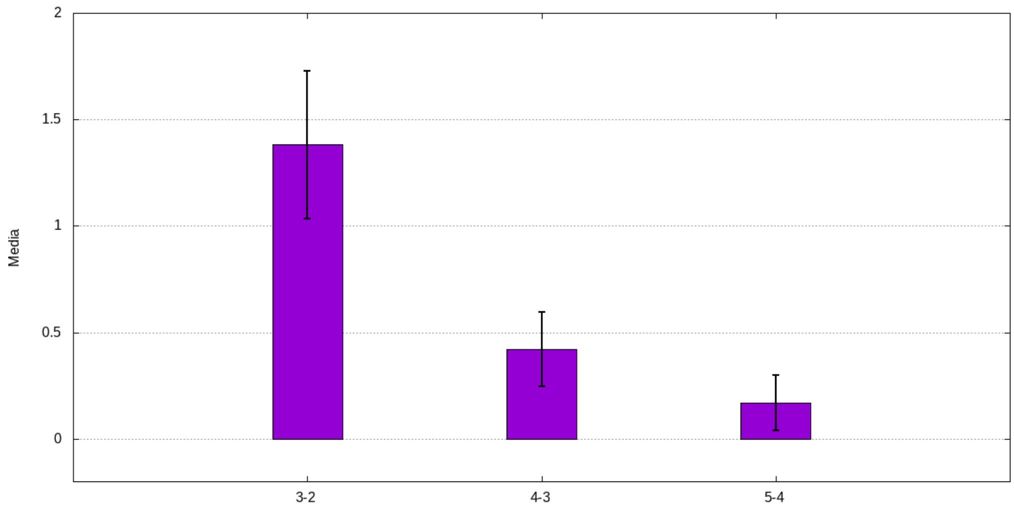


Figura 7.2: Differenza tra le medie delle classi terze pre e post le unità di apprendimento con LBD, IBL e AI.

entrambi enattivismo e costruttivismo (IIIA, IVB). Ciò costituisce un primo benchmark di riferimento per gli orientamenti pedagogici degli studenti italiani della scuola primaria.

Data la seconda ipotesi, per cui ci si attende una correlazione positiva tra la proposizione di tecniche didattiche afferenti all'orientamento espresso dagli alunni e i risultati da loro raggiunti, ci si aspettava di conseguenza una differenza significativa tra i risultati raggiunti con le tecniche LBD e IBL rispetto all'apprendimento intervallato. Ciò è avvenuto nelle classi terze, in cui il learning by doing ha ottenuto una differenza significativa rispetto all'AI, mentre l'IBL presenta una tendenza maggiore, ma non tale da essere significativa.

I risultati confermano quanto sostenuto per lungo periodo da didatti della matematica antichi e moderni, secondo i quali solo un apprendimento incentrato sul discente, e non sul contenuto o sull'insegnante, è il miglior mezzo per raggiungere la competenza matematica (Castelnuovo, 2017; Millán Gasca, 2016). Di conseguenza si può affermare come, adottando una tecnica aderente all'orientamento espresso dalla classe, si agevola l'apprendimento. Inoltre, come già riportato nella discussione della prima ipotesi, numerosi sono gli studi a favore dell'utilizzo di manipulatives nei primi anni della scuola primaria, in quanto costituirebbero il nesso tra l'oggetto matematico (astratto) e la sua cognizione (Carbonneau, Marley & Selig, 2013; Norton, Ulrich, Bell & Cate, 2018). Dai risultati emerge quindi come questo fattore risulti maggiormente determinante rispetto all'adozione di tecniche che favoriscono i processi di memorizzazione (come l'apprendimento intervallato). Il fatto che l'AI abbia ottenuto numerosi riscontri circa la sua efficacia in scuole secondarie (Churches, Dommett, Devonshire, Hall, Higgins & Korin, 2020; Kelley, Evans & Kelley, 2018) può portare a dedurre che ciò non avvenga alla scuola primaria in quanto il bambino entra lì in contatto per la prima volta con moltissimi degli oggetti matematici che conoscerà durante il suo percorso scolastico. La sua conoscenza è dunque in piena costruzione e non è sufficiente un'ottima strategia mnemonica, dal momento che viene meno il contatto diretto con l'oggetto matematico, considerato come questo vada ad inficiare la sua stessa comprensione. L'utilizzo di manipulatives ben si sposa con il principio di educazione matematica per cui la rappresentazione simbolica é capace di mediare tra l'esperienza diretta e il concetto matematico e può fungere da "palestra del pensiero matematico" (Millán Gasca, 2016, p 259). Solo una volta costruiti i primi oggetti, e svincolata la conoscenza matematica da manipulatives, l'apprendimento intervallato diviene quindi la strategia maggiormente funzionale.

Per quanto poi riguarda le classi quarte, si è innanzitutto preferito scorporare il dato e riportare le singole sezioni, dal momento che presentavano un'elevata variabilità. In dettaglio, nella IVA emerge una tendenza migliore per IBL e LBD rispetto all'apprendimento intervallato, che tuttavia non è sufficiente per risultare significativa. Sebbene il risultato confermi l'ipotesi di partenza, risulta interessate notare come appunto, già nella classe successiva alle terze, l'utilizzo di manipulatives risulti meno necessario per l'apprendimento dei contenuti proposti. Tale risultato potrebbe tuttavia nascondere il potenziale di manipulatives anche in età più avanzate, se abbinati ad apprendimenti maggiormente complessi e sfidanti, quali ingegneria, robotica

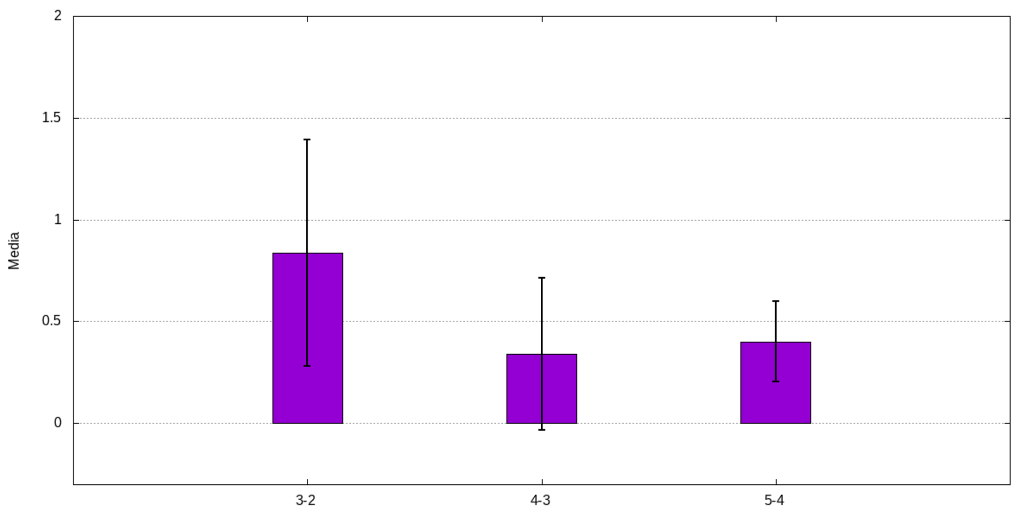


Figura 7.3: Differenza tra le medie della classe IVA pre e post le unità di apprendimento con IBL, LBD e AI.

o meccanica (Eagle, Seaney & Grubb, 2017; Hu & Li, 2020; Sullivan & Heffernan, 2016).

In IVB vi è poi una tendenza costante, per cui nessuna delle unità mostra una particolare incidenza sull'apprendimento.

Tali risultati non smentiscono né confermano l'ipotesi di partenza e sono difficilmente interpretabili, dal momento che le variabili considerate dallo studio paiono non avere influenza sui dati, mentre le variabili non considerate, essendo una ricerca sul campo, sono innumerevoli. In ogni caso, considerando globalmente i dati raccolti, è possibile dedurre che l'orientamento degli alunni abbia influenze maggiori, in termini di apprendimenti matematici, rispetto all'orientamento dell'insegnante. I risultati a conferma della prima ipotesi infatti si concentravano unicamente nei casi in cui l'insegnante avesse un orientamento di tipo costruttivista o enattivo, appunto in linea con quello degli alunni. Al contrario non sono stati ottenuti dati a favore nel caso in cui il docente presentasse un orientamento di tipo trasmissivo, in contrasto con quanto espresso dalla classe.

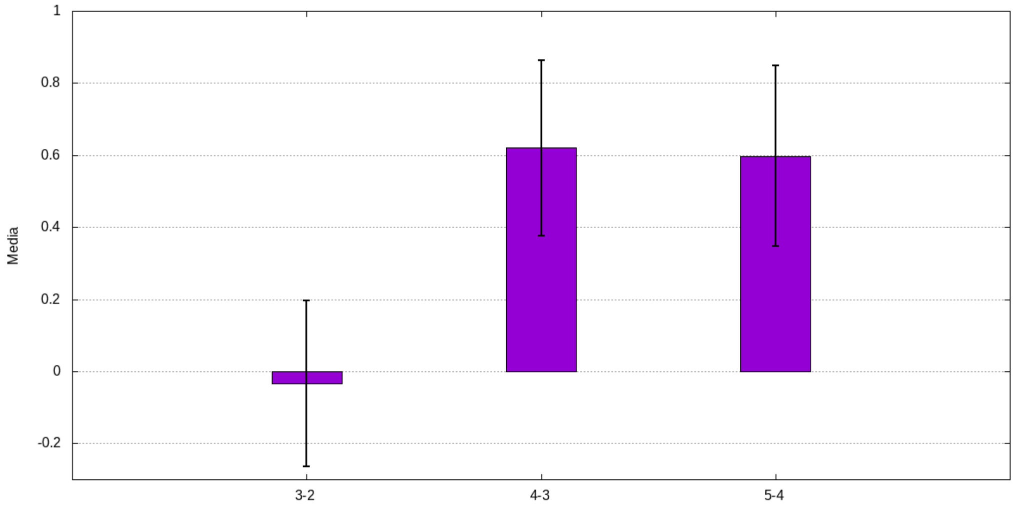


Figura 7.4: Differenza tra le medie della classe IVB pre e post le unità di apprendimento con IBL, LBD e AI.

7.3 Terza ipotesi

La situazione iniziale delle varie classi coinvolte nello studio non era omogenea: l'insieme delle classi terze e delle classi quarte, afferenti a diversi Istituto in differenti città, presentavano differenze macroscopiche. Come visibile nei grafici, la situazione inizialmente riscontrata nelle terze risultava generalmente in svantaggio se confrontata con quella delle classi quarte.

Tale discrepanza può essere ricondotta alla differente presenza di alunni con background migratorio: nel documento d'Istituto delle classi terze si rileva una percentuale pari al 25,1% di alunni stranieri, comparabile solo con il dato lombardo del 25,3%, regione con la maggior percentuale italiana. Nel documento d'Istituto delle classi quarte si legge invece di come la percentuale sia pari allo 0,44%, vicino allo 0,4% della Basilicata, terzultima regione per incidenza di alunni con background migratorio (Miur-Ufficio Statistica e studi, 2019b). Dalle indagini nazionali emerge infatti come alla scuola primaria gli studenti immigrati di prima e seconda generazione ottengano risultati inferiori in matematica (Invalsi, 2018).

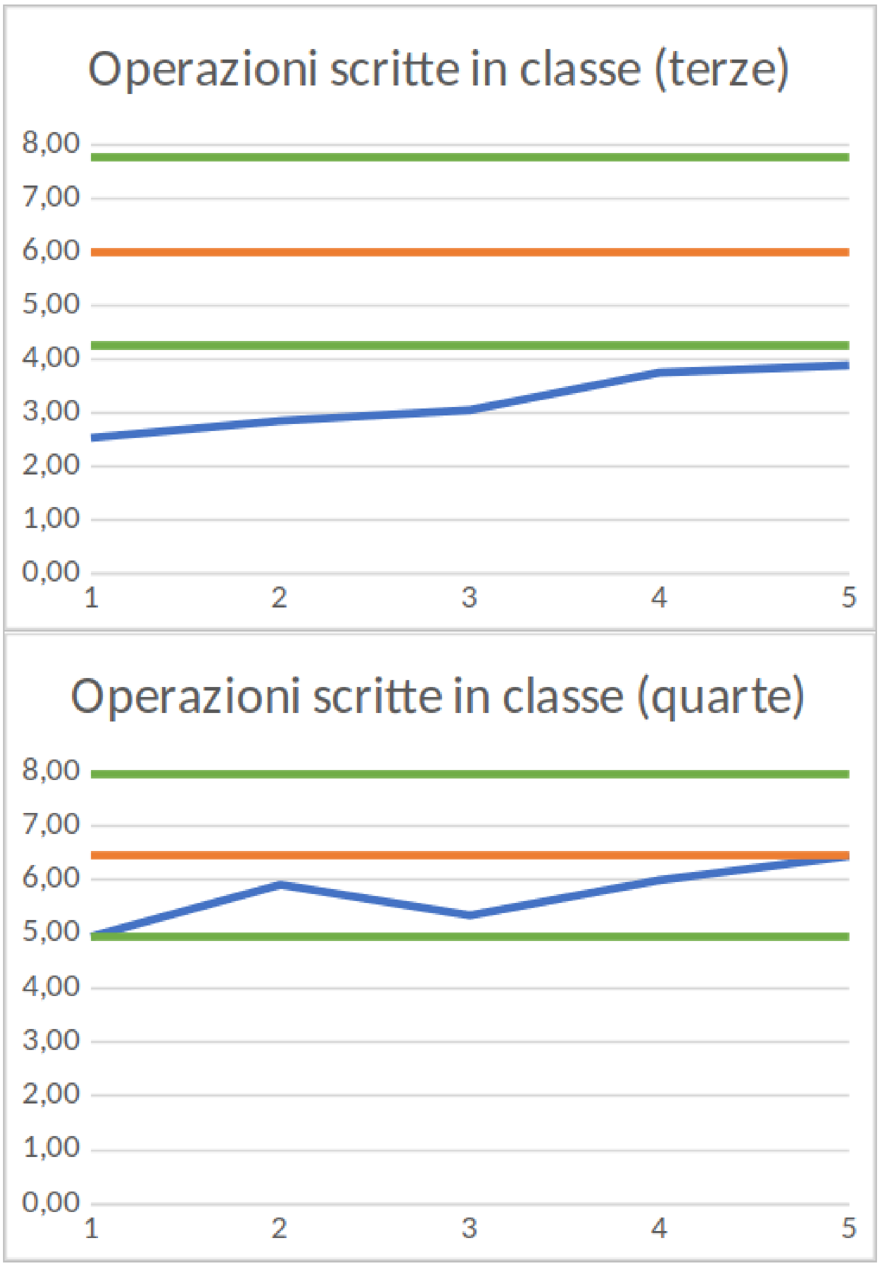


Figura 7.5: A titolo esemplificativo si riportano i grafici che illustrano l'evoluzione dei risultati ottenuti con il test AC-MT nelle classi terze e quarte ai cinque time points. I 5 numeri in ascissa rappresentano i time points in cui è stato somministrato il test, mentre i colori delle linee indicano in arancione la media di riferimento, in verde le deviazioni standard e in blu le medie delle classi ai vari time point.

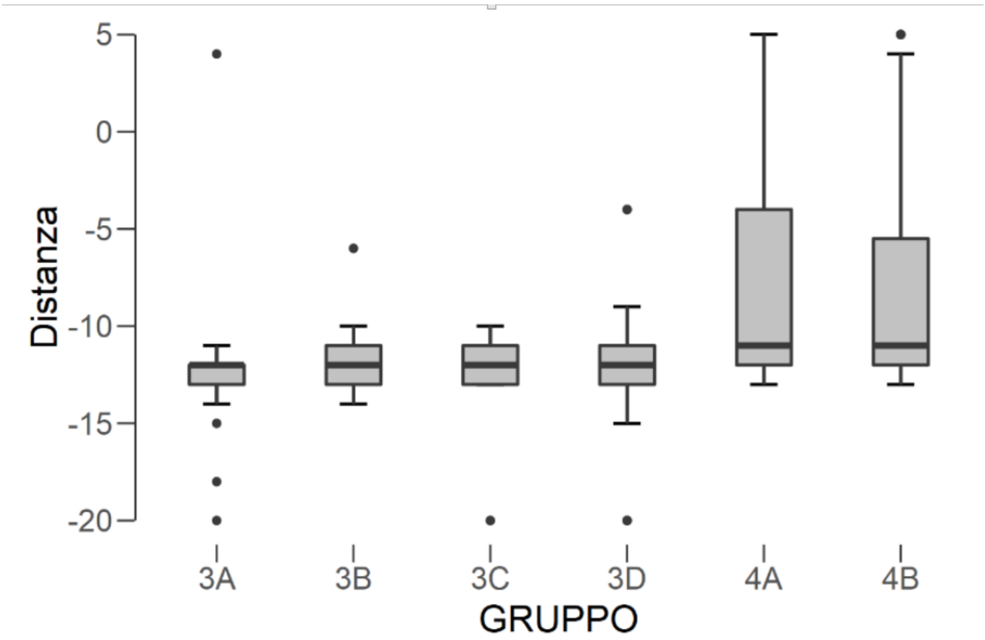


Figura 7.6: Distanza dalle rispettive medie di riferimento da parte delle singole classi ottenute nell'Embedded Figure Test (funzioni esecutive).

Inoltre, analizzando i risultati dell'Embedded Figures Test, risulta come gli alunni delle classi quarte abbiano ottenuto risultati migliori, anche se generalmente più variabili, rispetto alle terze.

Dal momento che le funzioni esecutive sono correlate alle abilità matematiche (Schmitt, McClelland, Tominey, Acock, 2015; Willoughby, Kupersmidt & Voegler-Lee, 2012), lo scostamento ottenuto dalle terze dalla media di riferimento nel test AC-MT potrebbe essere ricondotto anche a questo fattore. In particolare, la relazione tra funzioni esecutive e competenza matematica è data dal fatto che esse sono tra i maggiori predittori del livello di abilità raggiunto in tutto il percorso scolastico, con effetti a lungo termine (Veraksa, Aslanova, Bukhalenkova, Veraksa & Liutsko, 2020). Di conseguenza, i dati dell'Embedded Figure Test possono spiegare lo scostamento dalla media di riferimento ottenuto dalle terze. Al fine di evitare un'eccessiva variabilità nei risultati e la possibile interferenza da parte di questa variabile non prevista, si è dunque deciso di suddividere il campione, permettendo alle insegnanti delle diverse scuole di determinare la scansione delle unità di apprendimento autonomamente rispetto all'altra scuola coinvolta.

La terza e ultima ipotesi riguarda la correlazione negativa tra i livelli d'ansia e quelli dell'abilità matematica raggiunti con le tecniche di natura costruttivista o enattiva (situazioni a-didattiche). Innanzitutto, dal test ME-Ma è emerso come tutte le classi coinvolte presentassero nella prima valutazione elevati livelli di ansia matematica. Si è quindi tenuta in considerazione la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (2002), secondo la quale la tecnica dello spaced learning rappresenta una situazione didattica (ossia quando le intenzioni proprie del sistema sapere-insegnante-alunno sono esplicitate), mentre le altre due tecniche si ricollegano a quelle che sono state definite come situazioni a-didattiche, in altre parole situazioni di insegnamento-apprendimento in cui il contratto didattico viene meno, spostando il focus sulla relazione tra apprendente e oggetto matematico. Ciò avrebbe dovuto comportare un inferiore rischio da parte dell'insegnante di trasmettere o innescare ansia per la matematica, in quanto è stato rilevato come insegnanti della scuola primaria ansiosi influenzino gli alunni, aumentando i loro livelli di ansia nei confronti della disciplina (Beilock, Gunderson, Ramirez, & Levine, 2010). Una volta interiorizzate le basse aspettative ed elaborate autoattribuzioni stereotipate, gli alunni ne sono fortemente influenzate, con gravi ripercussioni sulla qualità degli apprendimenti (Castellana, 2018). Si è quindi ipotizzato come tecniche che implicano una minore mediazione dei contenuti da parte dell'insegnante, e prevedano invece una forma di apprendimento attivo, possano concorrere alla diminuzione dei livelli di ansia per la matematica provati dai bambini. In altre parole, le unità di apprendimento con IBL e LBD sono state configurate come situazioni a-didattica (Brousseau, 2008): l'attività proposta dall'insegnante non è di fatto stata percepita come una lezione, i bambini nelle interviste hanno descritto tali lezioni come se si fosse trattato di un gioco (campo semantico che si discosta in maniera netta a quello legato ad attività didattiche).

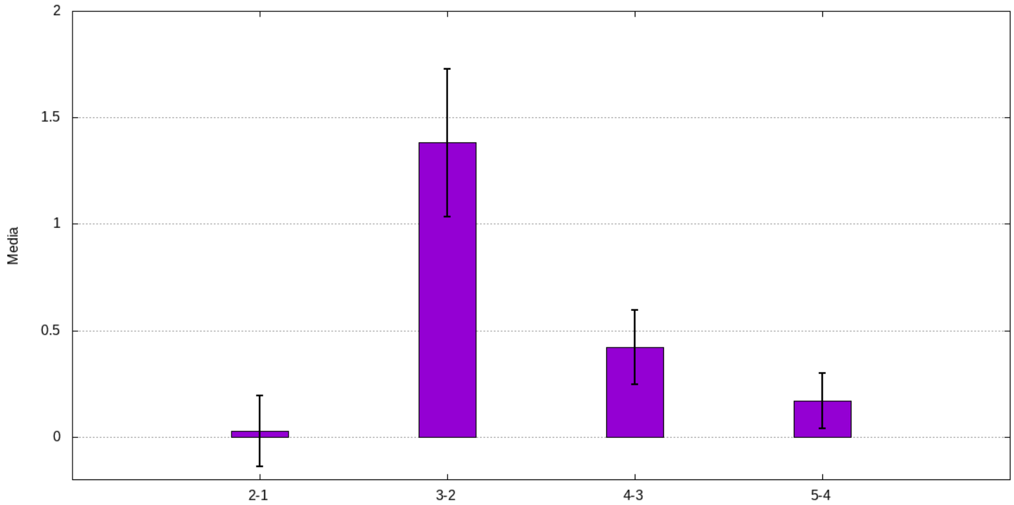


Figura 7.7: Risultati nel test T di Student tra le differenze delle medie nei cinque time points delle classi terze.

I risultati ottenuti, accorpando rispettivamente terze e quarte al fine di aumentare il campione e di conseguenza la significatività, mostrano come in terza vi sia una differenza significativa tra i risultati ottenuti con l'IBL rispetto all'apprendimento intervallato, mentre non vi è alcuna significatività rispetto alle altre tecniche.

Tale esito può essere motivato dal fatto che l'inquiry based learning prevede una forte strutturazione, soprattutto se non noto alla classe come in questo caso. Pertanto, il lavoro dell'insegnante risiede prevalentemente nella preparazione del materiale per l'apprendimento, assumendo in classe un ruolo di mediatore e non di detentore del sapere (Laksana, Dasna & Degeng, 2019). Tale ribaltamento di ruolo può avere ottenuto risultati significativamente migliori anche in virtù del venir meno dell'effetto Jourdain (Marazzani, 2009), anch'esso veicolato dall'influenza dell'insegnante sulla classe e tipico delle situazioni didattiche.

Per quanto invece riguarda le quarte, non si evidenziano differenze significative tra le tecniche proposte.

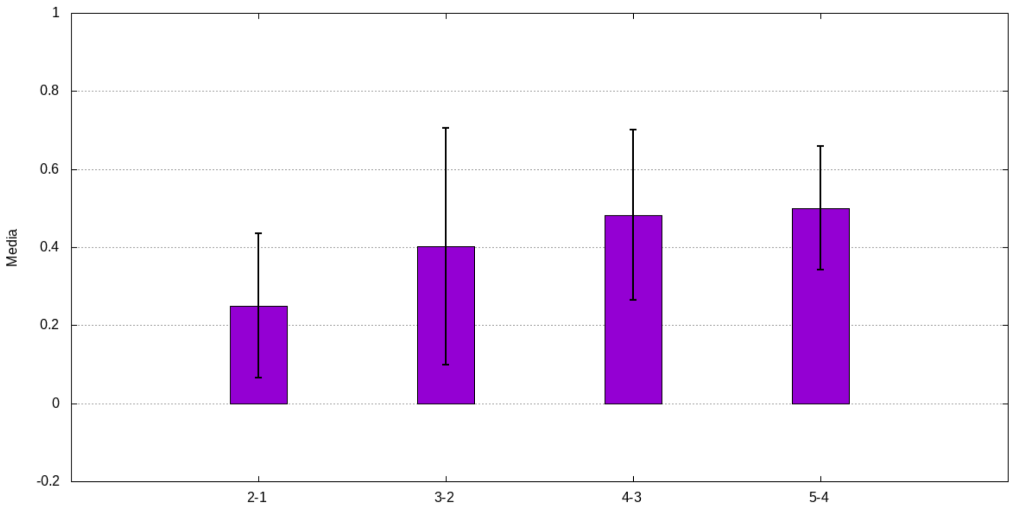


Figura 7.8: Risultati nel test T di Student tra le differenze delle medie nei cinque time points delle classi quarte.

Come visibile in grafico, l'unità di apprendimento proposta dall'insegnante sembra sia quella che ottiene risultati inferiori, seppur non in maniera significativa. Ciò è tuttavia rilevante in riferimento all'ansia matematica, in quanto essa è veicolata dalle figure educative di riferimento ed è sostenuta da un circolo vizioso per cui riduce gli apprendimenti, mutuando il pensiero di non essere portati per la matematica (Baccaglini Frank, et al., 2018), con un incremento dei livelli di ansia quando ci si trova a dover affrontare la disciplina (Carey, Hill, Devine & Szücs, 2016). Dal momento che l'insegnante è la medesima per entrambe le sezioni, si potrebbe dunque ipotizzare che involontariamente ella possa aver contribuito ad aumentare il fattore ansiogeno per gli studenti.

In conclusione, quanto ipotizzato al principio del presente studio ha trovato riscontro nei risultati ottenuti, soprattutto nel caso della prima e della seconda ipotesi. La variabilità riscontrata nel caso della terza suggerisce invece la necessità di ulteriori studi a riguardo.

8 | Conclusioni

L'importanza della competenza matematica nel mondo in cui ci troviamo a vivere non sarà mai sufficientemente sottolineata finché i risultati nelle rilevazioni nazionali, così come in quelle internazionali, denunceranno in tutte le età della vita il mancato raggiungimento di livelli sufficienti per essere cittadini del nostro tempo. Alla scuola, e alla ricerca, è dunque affidato un compito gravoso e imprescindibile, dal momento che "il paese ha bisogno di questi ragazzi e noi abbiamo il dovere di trasmettere loro quel linguaggio appassionante e quel patrimonio di idee che è la matematica" (Castelnuovo, 2017, p. 4). Il presente lavoro di tesi si muove da queste premesse, in direzione di una maggiore comprensione dei fattori pedagogici, come l'orientamento di insegnanti e alunni, che condizionano l'apprendimento.

Già Enriques, nel secolo scorso, aveva intuito come l'orientamento di ciascun insegnante ne influenzasse ineluttabilmente l'agire didattico e come una forzata spinta all'adozione di una tecnica, seppur scientificamente fondata e validata, avrebbe causato più nocumento che beneficio: "lasciamo a ciascuno la sua finestrella; egli farà allora la sua bella lezione, o, comunque, crederà di farla..., ed è già tanto. Se invece voi volete convincerlo a cambiar metodo, se volete che egli prenda un abito che ritenete più bello ma che non è per lui, il più delle volte anche quella finestrella, da cui traeva luce per le sue lezioni, si chiuderà, e voi non avrete ottenuto altro che togliere un po' d'entusiasmo ad un maestro!" (Enriques, citato in Castelnuovo, 2017, p. 171). Il, seppur limitato, merito del presente lavoro è quello di aver studiato, con mezzi nuovi, questo effetto, misurandone la portata in termini di apprendimento.

In aggiunta a ciò, risulta importante sottolineare il peso determinante delle scelte espresse dagli stessi studenti. Auspicando la nascita di un uomo nuovo, non più in balia degli eventi, del mercato del lavoro, delle richieste di una società consumistica, di una divisione capitalistica dell'umanità, ma "capace di dirigere e plasmare l'avvenire della società umana" (Montessori, 2017, p. 7), si coglie dunque la necessità di proporre una didattica che parta dal bambino, considerando le sue peculiarità cognitive e le forme educative che a lui si confanno, tenendo conto come i primi anni di vita siano determinanti per la formazione dell'essere umano, definiti come anni vitali (Montessori, 2017).

Certamente tra le limitazioni si annoverano i non chiari risultati riguardo alla relazione tra situazioni a-didattiche e ansia matematica, e ulteriori studi a riguardo sono necessari. Inoltre, la limitatezza del campione è di ostacolo alla significatività della ricerca. Nonostante ciò, i possibili elementi di originalità del presente lavoro sono costituiti dalla sperimentazione presso la scuola primaria dall'apprendimento intervallato, finora studiato a livello secondario e terziario (Thomas, Ansari, & Knowland, 2019), ma anche dall'adozione di tecniche quali il learning by doing con l'utilizzo di manipulatives (non ancora sperimentato nel contesto geografico di riferimento, come riportato da Laski e colleghi nel 2015). La proposta dell'inquiry based learning trova infine fondamento in quanto da un lato è considerata di riferimento per il rinnovamento della didattica delle discipline scientifiche, dall'altro le evidenze riportate in letteratura ne denunciano la mancata diffusione (Bolte, Holbrook, & Rauch, 2012; Croce, 2017). In ultima istanza, si sottolinea come la ben nota teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (2008) non sia ancora stata oggetto di approfondito studio in relazione alle recenti evidenze ottenute a riguardo dell'impatto sull'apprendimento da parte dell'ansia per la matematica.

In conclusione, questo lavoro apre un ulteriore spiraglio sui bisogni educativi dei bambini, che spesso rimangono inespressi, auspicando che loro desideri, aspettative e interessi trovino in Didattica della Matematica sempre maggiore spazio e attenzione, al fine di garantire una didattica realmente efficace per tutti e per ciascuno. Come infatti ci ricorda un'alunna di IIIA, "le sottrazioni, le moltiplicazioni e tanto altro si possono fare da chiunque, chiunque nel mondo, se ci metti impegno, forza e coraggio".

Riferimenti bibliografici

- Ambrisi, E. (2015). *I 120 anni della Mathesis. La storia dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica in Italia e la situazione attuale.* Arriccia (RM): Aracne.

- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed.).* Arlington, VA: Author.

- Amiripour, P., & Khodabandelou, R. (2019). The effectiveness of teaching based on educational neuroscience strategies on mathematical performance of working children. *Journal for Educators, Teachers and Trainers, 10(1)*, 101-109.

- Antonelli, Q. (1998). *Per una storia della scuola elementare trentina. Alfabetizzazione ed istruzione dal Concilio di Trento ai giorni nostri.* Trento: Comune di Trento.

- Aprile, F. (2012). *L'alunno furgoncino e l'alunno carrarmato. Una didattica enattiva per ridurre gli errori in educazione.* Roma: Armando.

- Arango, A. (2019). Social enactivism about perception-reply to McGann. *Adaptive Behavior, 27(2)*, 161-162.

- Area indagini internazionali invalsi. *Sintesi dei risultati italiani di OCSE Pisa 2018.* Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2018/docris/2019/Sintesi%20dei%20risultati%20italiani.pdf

- Arzarello, F., Bartolini Bussi, M.G., & Bazzini, L. (2013). Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: Alcune riflessioni. *La*

Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 1(6), 81-95.

▷ Asami-Johansson, Y., Attorps, I., & Winsløw, C. (2019) Comparing mathematics education lessons for primary school teachers: case studies from Japan, Finland and Sweden, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1614688.

▷ Ashcraft, M.H., & Faust, M.W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: an exploratory investigation. *Cognition and Emotion, 8(2)*, 97-125.

▷ Atkinson, R.C., & Shiffrin, R.M. (1968). Human memory: a proposed system and its control processes. In: K.W. Spence, & J.T. Spence (Cur.), *Advances in the Psychology of Learning and Motivation Research and Theory, vol II* (pp. 89-195). New York: Academic Press.

▷ Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view.* New York: Holt, Rinehart, and Winston.

▷ Baccaglini Frank, A, Di Martino, P, Natalini, R, Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica.* Milano: Mondadori.

▷ Baccaglini-Frank, A.E., & Bartolini Bussi, M.G. (2015). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: il progetto "PerContare". *Formre*, 3(15), 170-184.

▷ Baddeley, A.D., & Hitch, G. (1974). Working memory. In: G.H. Bower (Cur.), Recent *Advances in Learning and Motivation, vol 8* (pp. 47-89). New York: New York Press.

▷ Barelli, E., Branchetti, L., Tasquier, G., Albertazzi, L., & Levrini, O. (2018). Science of complex systems and citizenship skills: a pilot study with adult citizens. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1533-1545.

▷ Bartolini Bussi, M.G. (2009). Perché i bambini cinesi sono più bravi in matematica? *Innovazione e tradizione nella matematica e nel suo insegnamento*, Università Roma Tre, 16 novembre 2009. Roma: Università Roma Tre.

- Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Cur.), Handbook of International Research in Mathematics Education, second edition (pp. 746-783). New York e Londra: Routledge.

- Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32*, 269-294.

- Battistin, E., De Nadai, M., & Vuri, D. (2017). Counting rotten apples: Student achievement and score manipulation in Italian elementary schools. *Journal of Econometrics, 200*(2), 344-362.

- Bazzini, L. (2000). Matematica operativa e contemplativa nella scuola elementare. *Rivista 7 di Matematica della Università di Parma, 3*(6), 79-89.

- Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 107*(5), 1860-1863.

- Beilock, S.L., Gunderson, E.A., Ramirez, G., & Levine, S.C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 107*(5), 1860-1863.

- Benedicto-López, P., & Rodriguez-Cuadrado, S. (2019). Discalculia: manifestaciones clínicas, evaluación y diagnóstico. Perspectivas actuales de intervención educativa. *RELIEVE-Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, 25*(1).

- Berteletti, I., Lucangeli, D., Piazza, M., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Numerical estimation in preschoolers. *Developmental Psychology, 46*(2), 545-551.

- Biederman, I. (1987). Recognition-by-components: a theory of human image understanding. *Psychological review, 94*(2), 115-147.

- Bizzarro, M.L., Mammarella, I.C., & Girelli, L. (2010). Calcolo e abilità visuospaziali. In D. Lucangeli & I.C. Mammarella. (2010), *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento* (pp. 77-106). Milano: FrancoAngeli.

- ▷ Blakemore, S.J., & Frith, U. (2008). Learning and remembering. In K.W. Fischer, & M.H. Immordino-Yang (Cur.), *The Jossey-Bass reader on the brain and learning* (pp. 109-119). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

- ▷ Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M.A., Sträßer, R., & den Heuvel-Panhuizen, V. (2019). *European traditions in Didactics of Mathematics.* Cham (CH): Springer.

- ▷ Borgna, C., & Struffolino, E. (2017). Pushed or pulled? Girls and boys facing early school leaving risk in Italy. *Social Science Research, 61*, 298-313.

- ▷ Boser, J., Scherer, S., Kuchta, K., Wenzel, S.F.C., & Horz, H. (2017). Empirically founded teaching in psychology. An example for the combination of evidence-based teaching and the scholarship of teaching and learning. *Psychology Learning & Teaching, 16*(2), 261-275.

- ▷ Brousseau, G. (1986). Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Bordeaux: Mathématiques Université Sciences et Technologies.

- ▷ Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht (NL): Kluwer.

- ▷ Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

- ▷ Bruer, J. T. (1997). Education and the brain: A bridge too far. *Educational researcher, 26*(8), 4-16.

- ▷ Bruer, J.T. (2016). Where is educational neuroscience? *Educational Neuroscience, 1*, 1-12.

- ▷ Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning.* Cambridge: Harvard University.

- ▷ Bruner, J.S. (1960). *The process of education.* Cambridge: Harvard University.

- ▷ Bruner, J.S. (2011). *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola.* Milano: Feltrinelli.

- Budd, C.J., Cohen Kadosh, R., & Dowker, A. (2015). Promoting maths to the general public. In R. Cohen Kadosh, & A. Dowker (Cur.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 3-16). Oxford: UniversityPress.
- Butterworth, B. (2000). *The mathematical brain.* Londra: Papermac.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3-18.
- Butterworth, B. (2011). *Numeri e calcolo. Lo sviluppo delle competenze aritmetiche e la discalculia evolutiva.* Trento: Erickson.
- Butterworth, B. (2017). The implications for education of an innate numerosity-processing mechanism. *Philosophical Transactions B, 373*, 1-16.
- Butterworth, B. (2018). Low numeracy: from brain to education. In M.G. Bartolini Bussi & X.H. Sun (Cur.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades* (pp. 477-488). Cham (CH): Springer.
- Butterworth, B., & Kovas, Y. (2013). Understanding neurocognitive developmental disorders can improve education for all. *Science, 340*(6130), 300-305.
- Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science, 332*(6033), 1049-1053.
- Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2015). Dyscalculia: from brain to education. In R. Cohen Kadosh, & A. Dowker (Cur.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 647-661). Oxford: UniversityPress.
- Cambi, F. (2004). *Saperi e competenze.* Milano: Laterza.
- Caponi, B., Cornoldi, C., Falco, G., Focchiatti, R. & Lucangeli, D. (2012). MeMa. *Valutare la metacognizione, gli atteggiamenti negativi e l'ansia in matematica.* Trento: Erickson.
- Capperucci, D. (2017). Ripensare la didattica della Matematica nella scuola primaria a partire da un uso formativo dei risultati delle rilevazioni nazionali. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 9*(14), 46-75.

▷ Carbonneau, K.J., Marley, S.C., & Selig, J.P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400.

▷ Carey, E., Hill, F., Devine, A., & Szücs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology, 6*, 1-6.

▷ Carletti, A., & Varani, A. (2004). *Didattica costruttivista: dalle teorie alla pratica in classe.* Trento: Erickson.

▷ Casson, M. (2016). Laboratorio di matematica: un'occasione per lo sviluppo di competenze pro-sociali. *Bollettino dei docenti di matematica, 72*, 97-114.

▷ Castaldi, E., Mirassou, A., Dehaene, S., Piazza, M., & Eger, E. (2018). Asymmetrical interference between number and item size perception provides evidence for a domain specific impairment in dyscalculia. *PLoS One, 13*(12).

▷ Castellana, G. (2018). Quale formazione degli insegnanti per la promozione della qualità dell'insegnamento e l'efficacia degli apprendimenti degli studenti. *Formazione & Insegnamento. Rivista internazionale di Scienze dell'educazione e della formazione, 15*(3), 29-44.

▷ Castellana, G. (2018). Quale formazione degli insegnanti per la promozione della qualità dell'insegnamento e l'efficacia degli apprendimenti degli studenti. FORMAZIONE & INSEGNAMENTO. *Rivista internazionale di Scienze dell'educazione e della formazione, 15*(3), 29-44.

▷ Castiglioni, L., & Mariotti, S. (1996). Mathematica. In *Vocabolario della lingua latina.* Torino: Loescher.

▷ Cavicchi, V. (2016). *Storia e didattica della matematica. Insegnare tra sfide e prospettive.* Arriccia: Aracne.

▷ Caviola, S., Carey, E., Mammarella, I.C., & Szucs, D. (2017). Stress, time pressure, strategy selection and math anxiety in mathematics: a review of the literature. *Frontiers in Psychology, 8.*

▷ Chae-Young, K. (2017). Participation or pedagogy?: Ambiguities and tensions surrounding the facilitation of children as researchers. *Childhood, 24*(1), 84-98.

▷ Cheema, J.. (2017). Cross-country gender DIF in PISA science literacy items. *European Journal of Developmental Psychology, 16*, 1-15.

▷ Cherubini, P. (2005). *Psicologia del pensiero.* Milano: RaffaelloCortina.

▷ Chi, M.T.H, & Glaser, R. (1980). The measurement of expertise: Analysis of the development of knowledge and skill as a basis for assessing achievent. In E.L. Baker & E.S. Quellmalz (Cur.), *Educational Testing and Evaluation: Design, Analysis and Policy* (pp. 37-58). Beverly Hills (USA): Sage.

▷ Chi, M.T.H, & Hutchinson, J.E., & Robin, A.F. (1989). How inferences about novel domain-related concepts can be constrained by structured knowledge. *Merrill-Palmer Quarterly, 35*, 27-62.

▷ Chinello, A., Cattani, V., Bonfiglioli, C., Dehaene, S., & Piazza, M. (2013). Objects, numbers, fingers, space: clustering of ventral and dorsal functions in young children and adults. *Developmental Science, 16*(3), 377-393.

▷ Chinello, A., de Hevia, M.D., Geraci, C., & Girelli, L. (2013). Finding the spatial-numerical association of response codes (SNARC) in signed numbers: notational effects in accessing number representation. *Functional Neurology, 27*(3), 177-185.

▷ Churches, R., Dommett, E.J., Devonshire, I.M., Hall, R., Higgins, S., & Korin, A. (2020). Translating laboratory evidence into classroom practice with teacher-led randomized controlled trials: A perspective and meta-analysis. *Mind, Brain, and Education.* Advanced online publication. https://doi:10.1111/mbe.12243

▷ Ciarrapico, L. (2002). L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità. *Archimede, 3*, 123-128.

▷ Cicchini, G.M., Anobile, G., & Burr, D.C. (2019). Spontaneous representation of numerosity in typical and dyscalculic development. *Cortex, 114*, 151-163.

▷ Circolare Ministeriale 10 novembre 2005, n. 84.

▷ Claessens, A., & Engel, M. (2013). How important is where you start? early mathematics knowledge and later school success. *Teachers College Record, 115*(6).

- Clements, D.H., Sarama, J., & Germeroth, C. (2016). Learning executive function and early mathematics: Directions of causal relations. *Early Childhood Research Quarterly, 36*(3), 79-90.
- Coin, F. (2013). Didattica enattiva: cos'è e cosa può fare. Formazione & Insegnamento, 11(4), 127-133.
- Coin, F. (2016). *La didattica enattiva per una scuola dell'inclusione: uno studio nelle classi con alunni stranieri.* [Tesi di dottorato Università Ca' Foscari Venezia]. Archivio delle tesi Università Ca' Foscari Venezia. https://hdl.handle.net/10579/8316
- Coldwell, M., Greany, T., Higgins, S., Brown, C.,Maxwell, B., Stiell, B., . . . & Burns, H. (2017). *Evidence-informed teaching: An evaluation of progress in England.* Research report July 2017 (DFE-RR696). Department for Education.
- Consoli, G., Szpunar, G., & Sposet, P. (2019). Per una scuola efficace. Criticità della didattica per competenze e strategie di miglioramento. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 11*(18), 32-49.
- Contini, D., Di Tommaso, M.L., & Mendolia, S. (2017). The gender gap in mathematics achievement: Evidence from Italian data. *Economics of Education Review, 58*, 32-42.
- Cornoldi, C., & Carretti, B. (2019). La scuola e la promozione delle abilità di ragionamento. *Giornale italiano di psicologia, 4*, 801-804.
- Cornoldi, C., Carretti, B., Drusi, S., & and Tencati, C. (2015). Improving problem solving in primary school students: The effect of a training programme focusing on metacognition and working memory. *British Journal of Educational Psychology, 85*, 424-439.
- Cornoldi, C., Lucangeli, D. & Bellina, M. (2012). AC-MT 6-11. *Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione dei problemi.* Trento: Erickson.
- Corris, A., & Chemero, A. (2020). The broad scope of enactivism. *Adaptive Behavior, 28*(1), 27-28.

- Costall, A. (2017). 1966 and all that: James Gibson and Bottom-Down Theory, *Ecological Psychology, 29*(3), 221-230.
- D.M. 16 novembre 2012, n. 254.
- D'Amore B. & Fandiño Pinilla M.I. (2009). L'effetto Topaze. Analisi delle radici ed esempi concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 23*(1), 35-59.
- D'Amore B. (2000). La Didattica della Matematica alla svolta del millennio: radici, collegamenti e interessi. *La matematica e la sua didattica, 3*, 407-422.
- D'amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.
- D'amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2006). Basi epistemologiche della Didattica della Matematica. In: B. D'Amore (Cur.), *Matematica: l'emergere della didattica nella formazione. Rassegna. XIV*, (pp. 8-14).
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2018). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 26*(2), 247-291.
- D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19*(3), 223-246.
- Damiani, P., Merlo, D., Sargenti, A., & Testa, C. (2016). Verso una "didattica inclusiva della matematica" attraverso l'utilizzo di geogebra e la didattica per competenze. Un percorso pluriennale di ricerca-formazione per i docenti. In O. Robutti (cur.), *La formazione docenti con Geogebra. Atti del IV GeoGebra Italian Day 2014* (pp. 83-92). Milano: Ledizioni.
- Damiano, E. (2017). Apprendimento e Insegnamento nella prospettiva dell'Enattivismo. *Education Sciences & Society-Open Access Journal, 7*(2).
- Damiano, L. (2012). Co-emergences in life and science: a double proposal for biological emergentism. *Synthese, 185*(2), 273-294.

▷ Danielson, C. (2018). *The framework for teaching clusters. Six clusters supporting high level learning, math version.* Chicago: The Danielson Group.

▷ Danielyan, N. (2017). Constructivism representatives about cognition process. *Philosophy Study, 7*(2), 75-86.

▷ De Bock D., Van Dooren W., & Verschaffel L. (2020). Searching for alternatives for New Math in Belgian primary Schools: influence of the Dutch model of Realistic Mathematics Education. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Cur.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics. ICME-13 Monographs*, (pp. 41-61). Berlino: Springer.

▷ De Fort, E. (2015). Maestri e maestre in Italia dalla fine dell'Antico Regime alla salita al potere del Fascismo. Nascita e sviluppo di una professione. *Historia y Memoria de la Educación 1*, 131-201.

▷ De Jaegher, H. (2018). The intersubjective turn. In A. Newen, L. De Bruin, & S. Gallagher (Cur.), *The Oxford Handbook of 4E Cognition* (pp. 453-467). Oxford.

▷ De Jaegher, H., & Di Paolo, E. (2007). Participatory sensemaking. *Phenomenology and the Cognitive Sciences, 6*, 485-507.

▷ De Jesus, P. (2016). From enactive phenomenology to biosemiotic enactivism. *Adaptive Behavior, 24*(2), 130-146.

▷ Deci, E.L., & Ryan, R M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior.* New York, NY: Plenum.

▷ Decreto del Presidente della Repubblica 12 febbraio 1985, n. 104.

▷ Decreto Ministeriale 16 novembre 2012, n. 254 "Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione".

▷ Decreto Ministeriale 16 novembre 2012, n. 254.

▷ Decreto Ministeriale 31 luglio 2007 "Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione".

▷ Dehaene, S, & Cohen, L. (2007). Cultural recycling of cortical maps. *Neuron, 56*(2), 384-398.

- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1-42.
- Dehaene, S. (2010). *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi.* Milano: Raffaello Cortina.
- Dehaene, S. (2010). The calculating brain. In D.A. Sousa (Cur.), *Mind, brain, and education. Neuroscience implications for the classroom* (pp. 179-198). Bloomington (USA): Solution Tree.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology, 20*(3-6), 487-506.
- Dehaene-Lambertz, G., Hertz-Pannier, L., Dubois, J., Mériaux, S., Roche, A., Sigman, M., & Dehaene, S. (2006). Functional organization of perisylvian activation during presentation of sentences in preverbal infants. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 103*(38), 14240-14245.
- Delval, J. (2006). *Aprender en la vida y en la escuela.* Madrid: Morata.
- Devlin, K. (2010). The mathematical brain. In D.A. Sousa (Cur.), *Mind, brain, and education. Neuroscience implications for the classroom* (pp. 163-177). Bloomington (USA): Solution Tree.
- Dewey, J. (2008). *The School and Society & The child and the Curriculum.* Hawthorne (USA): BN Publishing. (Prima edizione del 1900 e 1902).
- Di Martino, P., & Gregorio, F. (2019). The mathematical crisis in secondary-tertiary transition. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(4), 825-843.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education, 43*, 471-483.
- Di Paolo, E. (2005). Autopoiesis, adaptivity, teleology, agency. *Phenomenology and the Cognitive Sciences, 4*(4), 429-452.
- Donaldson, M. (1978). *Children's mind.* Glasgow: Fontana/Collins.
- Dongwi, B.L., & Schäfer, M. (2019). The co-emergence of visualisation and reasoning in mathematical problem solving: An enactivist interpretation. In:

M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Cur.). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, (pp. 193-200). Pretoria (Sudafrica): PME.

▷ Dowker, A. (2017). Interventions for primary school children with difficulties in mathematics. *Advances in Child Development and Behavior, 53*, 255-287.

▷ Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematics education?. In: T. Dooley, & G., Gueudet (Cur.). *CERME 10. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 56-62). Dublino: Institute of Education.

▷ Dunn, D.S., Saville, B.K., Baker, S.C., & Marek, P. (2013). Evidence-based teaching: Tools and techniques that promote learning in the psychology classroom. *Australian Journal of Psychology, 65*, 5-13.

▷ Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lang.

▷ Duval, R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica, 20*(4), 585-619.

▷ Eagle, F.W., Seaney, K.D., & Grubb, M.P. (2017). Musical example to visualize abstract quantum mechanical ideas. *Journal of Chemical Education, 94*(12), 1989-1994.

▷ Ebbinghaus, H. (1913). Memory: A contribution to experimental psychology. New York: Teachers College. (Prima edizione del 1885).

▷ Ekkekakis, P., & Zenko, Z. (2016). Chapter 18 - Escape from Cognitivism: exercise as hedonic experience. In: M. Raab, P. Wylleman, R. Seiler, A.M. Elbe, A. Hatzigeorgiadis (Cur.), *Sport and Exercise Psychology Research* (pp. 389-414). Londra: Academic Press.

▷ Ellenberg, J. (2014). *How not to be wrong. The power of mathematical thinking.* New York: The Penguin.

▷ Elliott, L.E., Braham, E.J., & Libertus M.E. (2017). Understanding sources of individual variability in parents' number talk with (young) children. *Journal of Experimental Child Psychology, 159*, 1-15.

- Erlwanger, A. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behaviour, 1*(2), 88-107.
- ESCS index. (2002). In *Glossary of Education at a Glance*. Paris: OECD.
- European parliament and council of the European Union. (2019). *Key competences for lifelong learning.* Luxembourg: Publications Office of the European Union.
- Evangelou, F., & Kotsis, K. (2019). Real vs virtual physics experiments: comparison of learning outcomes among fifth grade primary school students. A case on the concept of frictional force. *International Journal of Science Education, 41*(3), 330-348.
- Faggiano, E., Montone, A., & Mariotti, M.A. (2018) Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(8), 1165-1180.
- Farneti, A. (2013). *Elementi di psicologia dello sviluppo.* Roma: Carrocci.
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(7), 307-314.
- Feng, K., Zhao, X., Liu, J., Cai, Y., Ye, Z., Chen, C., & Xue, G. (2019). Spaced learning enhances episodic memory by increasing neural pattern similarity across repetitions. *The Journal of Neuroscience, 39*, 5351-5360.
- Ferrero, M., Garaizar, P., & Vadillo, M. (2016). Neuromyths in education: Prevalence among Spanish teachers and an exploration of cross-cultural variation. *Frontiers in Human Neuroscience, 10*(496).
- Filippatou, D., Pantazi, E., & Triandafillidis, T. (2016). Math anxiety and achievement in mathematics. Teaching programme with the use of manipulatives. *ICERI2016 Proceedings*, 2138-2147.
- Fischer, K.W. (2009). Mind, brain, and education: Building a scientific groundwork for learning and teaching. *Mind, Brain, and Education, 3*(1), 3-16.

- ▷ Flavell, J.H. (1981). Cognitive monitoring. In W.P. Dickson (Cur.), *Children's Oral Communication Skills* (pp. 35-60). New York: Academic Press.
- ▷ Frabboni, F. (2009). *Difendiamo la coeducazione a scuola.* Milano: FrancoAngeli.
- ▷ Frabboni, F., & Pinto Minerva, F. (2003). Introduzione alla pedagogia generale. Roma-Bari: Laterza.
- ▷ Froese, T., & Di Paolo, E. A. (2009). Sociality and the life-mind continuity thesis. *Phenomenology and the Cognitive Sciences, 8*(4), 439-463.
- ▷ Froese, T., & Ziemke, T. (2009) Enactive artificial intelligence: Investigating the systemic organization of life and mind. *Artificial Intelligence*, 173(3-4), 466-500.
- ▷ Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer.
- ▷ Gaidoschik, M. (2019a). *Considerations on developmental stage models, learning trajectories and maybe better ways to guide early arithmetic instruction.* Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Netherlands.
- ▷ Gaidoschik, M. (2019b). Didactics as a Source and Remedy of Mathematical Learning Difficulties. In A. Fritz, V. Geraldi Haase, & P. Räsänen. *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*, (pp. 73-89). Cham (CH): Springer.
- ▷ García-García, F.J,; Quesada-Armenteros, A., Romero Ariza, M., & Abril Gallego, A.M. (2019). Promoting inquiry in mathematics and science: professional development of primary and secondary school teachers. *Educación XX1, 22*(2), 335-359.
- ▷ Geake, J.G. (2009). *Il cervello a scuola. Neuroscienze e educazione tra verità e falsi miti.* Trento: Erickson.
- ▷ Geary, D.C. (2013). Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities. *Current Directions in Psychological Science, 22*(1), 23-27.

▷ Gelman, R., & Gallistel, C.R. (1986). *The child's understanding of number.* Cambridge (USA) - Londra: Harvard University.

▷ Goldstein, J. (2017). Heinz von Foerster and the second-order cybernetics. *Emergence: Complexity and Organization*, 19(2).

▷ Grabner, R., Ansari, D., De Smedt, B., & Hannula, M. (2010). Glossary of technical terms in cognitive neuroscience. *ZDM Mathematics Education, 42*(6), 661-663.

▷ Grabner, R.H., Obersteiner, A., De Smedt, B., Vogel, S., von Aster, M., Leikin, R., & Nuerk H.C. (2016). Mathematics education and neuroscience. In G. Kaiser (Cur.), Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education (pp. 657-658). Cham (CH): Springer.

▷ Graifenberg, P. (2001). "All'Istituto magistrale ho imparato a tenere una lezione sul gatto, una sul numero tre, una sul pero..." La formazione delle maestre (1870-1914). In: Q. Antonelli (Cur.), *A scuola! A scuola! Popolazione e istruzione dell'obbligo in una regione dell'area alpina secc. XVIII-XX*, (pp. 71-91). Trento: Museo Storico in Trento.

▷ Groen, G.J., & Parkman, J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*(4), 329-343.

▷ Grospietsch, F., & Mayer, J. (2020). Misconceptions about neuroscience: Prevalence and persistence of neuromyths in education. *Neuroforum, 26*(2), 63-71.

▷ Guasti, L. (2012). *Didattica per competenze.* Trento: Erickson.

▷ H., Kondratjew, & M., Kahrens. (2019). Leveraging experiential learning training through spaced learning. *Journal of Work-Applied Management, 11*(1), 30-52.

▷ Halberda, J., Mazzocco, M.M.M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature, 455*(7213), 665-668.

▷ Halloun, I. (2016). *Mind, brain, and education: A systemic perspective.* Working paper. Jounieh (LB): H Institute.

▷ Han, H., Soylu, F., & Anchan, D.M. (2019). Connecting levels of analysis in educational neuroscience: A review of multi-level structure of educational neuroscience with concrete examples. *Trends in Neuroscience and Education*, 17.

▷ Hartwright, C.E., Looi, C.Y., Sella, F., Inuggi, A., Santos, F.H., González-Salinas, C., ... Fuentes, L.J. (2018). The neurocognitive architecture of individual differences in math anxiety in typical children. *Scientific Reports, 8*(1).

▷ Hebb, D.O. (1949). *The organization of behavior: a neuropsychological theory.* Hoboken (USA): Wiley.

▷ Hewstone, M. (1991). *Attribuzione causale: dai processi cognitivi alle credenze collettive.* Milano: Giuffrè.

▷ Hilgard, E.R., & Bower, G.H. (1970). *Le teorie dell'apprendimento.* Milano: FrancoAngeli.

▷ Holenstein, M., Bruckmaier, G. & Grob, A. (2020). Transfer effects of mathematical literacy: an integrative longitudinal study. *European Journal of Psychology Education.*

▷ Holmes, J.D. (2016). *Great myths of education and learning.* Chichester (GB): Wiley Blackwell.

▷ Howard-Jones, P., Varma, S., Ansari, D., Butterworth, B., De Smedt, B., Goswami, U., Laurillard, D., & Thomas, M. (2016). The principles and practices of educational neuroscience: Commentary on Bowers (2016). *Psychological Review, 123*(5), 620-627.

▷ Hu, Y., & Li, C. (2020). Implementing a multidimensional education approach combining problem-based learning and conceive-design-implement-operate in a third-year undergraduate chemical engineering course. *Journal of Chemical Education, 97*(7), 1874-1886.

▷ Hughes, M. (1975). *Egocentrism in pre-school children.* [Tesi di dottorato Università di Edimburgo]. Archivio delle tesi Università di Edimburgo. https://era.ed.ac.uk/handle/1842/22329

- Hughes, M., & Grieve, R. (1980). On Asking Children Bizarre Questions. *First Language, 1*(2), 149-160.
- Hutchison, J., Lyons, I., & Ansari, D. (2017). More similar than different: gender differences in basic numeracy are the exception not the rule. Child development, 90(1), e66-e79.
- Hwang, K.K. (2013). Linking science to culture: challenge to psychologists. *Social Epistemology, 27*(1), 105-122.
- Ianes, D. (2015). *L'evoluzione dell'insegnante di sostegno.* Trento: Erickson.
- Istituto Comprensivo Bolzano VI. (2017). *PTOF, piano triennale offerta formativa 2017-2020.*
- Istituto Comprensivo J.A. Comenius. (2017). *Progetto di Istituto.*
- Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. Gruppo di ricerca TIMSS 2015. *Indagini IEA 2015 TIMSS: i risultati degli studenti italiani in matematica e scienze.* Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. https://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2015/documenti/Rapporto_nazionale_TIMSS_2015.pdf
- Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2018). *Rapporto Prove INVALSI 2018.* Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. https://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2018/Rapporto_prove_INVALSI_2018.pdf
- Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2019). *Rapporto Prove INVALSI 2019.* Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/Rapporto_prove_INVALSI_2019.pdf
- Jeung, H.H., & Kellogg, D. (2019): A story without SELF: Vygotsky's pedology, Bruner's constructivism and Halliday's construalism in understanding narratives by Korean children. *Language and Education, 33*(6), 506-520.
- Jiang, X., & Perkins, K. (2013). A conceptual paper on the application of the picture word inductive model using Bruner's constructivist view of learning and the cognitive load theory. *Interdisciplinary Journal of Teaching and Learning, 3*(1), 8-17.

▷ Jing, S. (2017, maggio). Compare and contrast of constructivism and community of practice. In: D. Tan (Cur.) *3rd international conference on social science, management and economics (ssme 2017).* Guangzhou (Cina), (pp. 114-126). Lancaster (USA): DEStech.

▷ Jordan, N.C., Hanich, L.B., & Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children: a longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*(2), 103-119.

▷ Kandel, E.R., & Siegelbaum, S.A. (2014). I meccanismi cellulari di conservazione della memoria implicita e le basi biologiche dell'individualità. In E.R. Kandel, J.H. Schwartz, & T.M. Jessel (Cur.), *Principi di neuroscienze* (pp. 1463-1488). Milano: Ambrosiana.

▷ Kelleher, I., & Whitman, G. (2018). A bridge no longer too far: a case study of one school's exploration of the promise and possibilities of mind, brain, and education science for the future of education. *Mind, Brain, and Education, 12*(4), 224-230.

▷ Kelley, P., & Whatson, T. (2013). Making long-term memories in minutes: A spaced learning pattern from memory research in education. *Frontiers in Human Neuroscience, 7*(589).

▷ Kelley, P., Evans, M.D.R., & Kelley, J. (2018) Making memories: Why time matters. *Frontiers in Human Neuroscience, 12*(400).

▷ Kelly, G. (1955). *The Psychology of Personal Constructs, Vol. 1.* New York: Norton.

▷ Kermani, H. (2017). Computer mathematics games and conditions for enhancing young children's learning of number sense. *Malaysian Journal of Learning and Instruction, 14*(2), 23-57.

▷ Kinchin, I.M. (2020). A 'species identification' approach to concept mapping in the classroom. *Journal of Biological Education, 54*(1), 108-114.

▷ Kirchhoff, M., and Froese, T. (2017). Where there is life there is mind: in support of a strong life-mind continuity thesis. *Entropy 19*(4).

- Koyama, M.S., O'Connor, D., Shehzad, Z., & Milham, M.P. (2017). Differential contributions of the middle frontal gyrus functional connectivity to literacy and numeracy. *Scientific Reports, 7*(1).

- Kramár, E.A., Babayan, A.H., Gavin, C.F., Cox, C.D., Jafari, M., Gall, C.M., Rumbaugh, G., & Lynch, G. (2012). Synaptic evidence for the efficacy of spaced learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 109*(13), 5121-5126.

- Kroeger, L.A., Brown, R D., & O'Brien, B.A. (2012). Connecting neuroscience, cognitive, and educational theories and research to practice: a review of mathematics intervention programs. *Early Education and Development, 23*(1), 37-58.

- Kroeze, K., Hyatt, K. J., & Lambert, M.C. (2016). Brain Gym: Pseudoscientific practice. *Journal of the American Academy of Special Education Professionals*, 75-80.

- Kubota, M. (2019). What is "communication"? Beyond the Shannon & Weaver's model. *International Journal for Educational Media and Technology, 13*(1), pp.54-65.

- Kucian, K., McCaskey, U., O'Gorman Tuura, R., & von Aster, M. (2018). Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children. *Translational Psychiatry, 8*(1), 273.

- La Marca, A. (2005). *Personalizzazione e apprendimento.* Roma: Armando.

- Laksana, D.N.L., Dasna, I.W., & Degeng, I.N.S. (2019). The effects of inquiry based learning and learning styles on primary school students' conceptual understanding in multimedia learning environment. Journal of Baltic Science Education, 18(1), 51-62.

- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. *Cognition, 93*, 99-125.

- Legge 1 luglio 1940, n. 899 "Riforma Bottai".

- Legge 13 novembre 1859, n. 3275 "Casati".

- ▷ Legge 8 ottobre 2010, n. 170.
- ▷ Leikin, R. (2018). How can cognitive neuroscience contribute to mathematics education? Bridging the two research areas. In G. Kaiser, H. Forgasz, E. Simmt, & B. Xu (Cur.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 363-383) Cham (CH): Springer.
- ▷ Letina, A. (2019). Factors influencing the frequency of use of inquiry-based approach to teaching primary science. *Croatian Journal of Education, 21*(1), 153-166.
- ▷ Liggett, R.S. (2017). The impact of use of manipulatives on the math scores of grade 2 students. *Brock Education Journal, 26*(2), 87-101.
- ▷ Lockhart, P. (2009). *Contro l'ora di matematica. Un manifesto per la liberazione di professori e studenti.* Milano: Rizzoli.
- ▷ Lotfolahi, A.R., & Salehi, H. (2016). Spacing effects in real-world classroom vocabulary learning. *SAGE Open*, 1-9.
- ▷ Lowel, S., & Singer, W. (1992). Selection of intrinsic horizontal connections in the visual cortex by correlated neuronal activity. *Science, 255*(5041), 209-212.
- ▷ Lucangeli, D., Mammarella, I. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento. Milano: FrancoAngeli.
- ▷ Lupoli, N. (2012). *La formazione come bene comune.* Milano: FrancoAngeli.
- ▷ Lyons, I.M., & Ansari, D. (2015). Numerical order processing in children: from reversing the distance-effect to predicting arithmetic: development of ordinality. *Mind, Brain, and Education, 9*(4), 207-221.
- ▷ Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* New York-Abingdon: Routledge.
- ▷ Ma, X., & Xu, J. (2004). The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis. *Journal of Adolescence, 27*(2), 165-179.

- Maccario, D. (2017). Discursive practices and teaching mediation to support learning in mathematics and Italian in primary school from Fenix program. *European Journal of Social Sciences Education and Research, 4*(3), 28-37.

- Macchi Cassia, V., Valenza, E., & Simion, F. (2013). *Lo sviluppo della mente umana. Dalle teorie classiche ai nuovi orientamenti.* Bologna: il Mulino.

- Macdonald, K., Germine, L., Anderson, A., Christodoulou, J., & McGrath L.M. (2017). Dispelling the myth: Training in education or neuroscience decreases but does not eliminate beliefs in neuromyths. *Frontiers in Psychology, 8*(1314).

- MacGregor, J.N., Ormerod, T.C., & Chronicle, E.P. (2001). Information processing and insight: a process model of performance on the nine-dot and related problems. Journal of experimental psychology. *Learning, memory, and cognition, 27*(1), 176-201.

- Magro, T., & Muffolini, E. (2011). *Fondamenti di psicologia generale.* Milano: Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto.

- Makar, K., Ali, M., & Fry, K. (2018). Narrative and inquiry as a basis for a design framework to reconnect mathematics curriculum with students. International Journal of Educational Research, 92, 188-198.

- Mammarella, I.C., Donolato, E., Caviola, S., & Giofrè, D. (2018). Anxiety profiles and protective factors: a latent profile analysis in children. *Personality and Individual Differences, 124*, 201-208.

- Marazzani, I. (2009). L'effetto Jourdain e l'effetto Dienes. Analisi delle radici ed effetti concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 23*(3), 319-342.

- Margiotta, U. (2007). *Insegnare nella società della conoscenza.* Lecce: Pensa MultiMedia.

- Margiotta, U. (2011). *The changing mind. From neural plasticity to cognitive modificability.* Lecce: Pensa MultiMedia.

- Marr, D. (1982). *Vision: a computational approach.* San Francisco: Freeman & Co.

- ▷ Maturana, H., & Varela, F. (1992). *The tree of knowledge.* Boston: Shambhala.
- ▷ Mayo, J.A. (2018). The efficacy of concept mapping as a learning tool in life-span development classes. *Perspectives In Learning, 17*(1), 46-52.
- ▷ Mazzocco, M.M.M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PLoS One, 6*(9).
- ▷ McCloskey, M., Harley, W., & Sokol, S.M. (1991). Models of arithmetic fact retrieval: an evaluation in light of findings from normal and brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17*(3), 377-397.
- ▷ McGee K. (2006). Enactive cognitive science. Part 2: methods, insights, and potential. *Constructivist Foundations, 1*(2), 73-82.
- ▷ McKay, V. (2018). Literacy, lifelong learning and sustainable development. Australian *Journal of Adult Learning, 58*(3), 390-425.
- ▷ Mcmahon, K., Yeh, C.S., & Etchells, P. (2019). The impact of a modified initial teacher education on challenging trainees' understanding of neuromyths. *Mind, Brain, and Education, 13*(4), 288-297.
- ▷ Mellone, M., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2018). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 3*, 50-62.
- ▷ Millán Gasca, A. (2016). *Numeri e forme. Didattica della matematica con i bambini.* Bologna: Zanichelli.
- ▷ Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review, 63*, 81-97.
- ▷ Miur-Ufficio Statistica e studi. (2019a). *Gli alunni con cittadinanza non italiana A.S. 2017/2018.* Roma: Miur.
- ▷ Miur-Ufficio Statistica e studi. (2019b). *Notiziario stranieri 1718.* Roma: MIUR.

- Moll, K., Landerl, K., Snowling, M.J., & Schulte-Koerne, G. (2019). Understanding comorbidity of learning disorders:task-dependent estimates of prevalence. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 60*(3), 286-294.

- Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and mathematics.* Dordrecht (NL): Springer.

- Monari Martinez, E. (2002) Learning mathematics at school....and later on. *Down Syndrome News and Update, 2*(1), 19-23.

- Montanari, F. (2004). *Μαθημα* In *Vocabolario della lingua greca.* Torino: Loescher.

- Montanari, M. (2019). Un bilancio critico sull'inclusione degli alunni con "bisogni educativi speciali" in Italia. *Italian Journal Of Special Education For Inclusion, 7*(2), 351-370.

- Montessori, M. (2013). *Psicoaritmetica. L'aritmetica sviluppata secondo le indicazioni della psicologia infantile durante venticinque anni di esperienze.* Roma: Opera Nazionale Montessori. (Prima edizione del 1934).

- Montessori, M. (2017). *La mente del bambino.* Milano: Garzanti.

- Morin, E. (2000). *La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero.* Milano: Raffaello Cortina.

- Morsanyi, K., van Bers, B.M.C.W., McCormack, T., & McGourty, J. (2018). The prevalence of specific learning disorder in mathematics and comorbidity with other developmental disorders in primary school age children. *British Journal of Psychology*, 917-940.

- Moyer-Packenham, P.S., Salkind, G., & Bolyard, J.J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 8*(3), 202-218.

- Mulligan, J., Verschaffel, L., Baccaglini-Frank, A., Coles, A., Gould, P., He, S., Ma, Y., Milinković, J., Obersteiner, A., Roberts, N., Sinclair, N., Wang, Y., Xie, S., & Yang, D.C. (2018). Whole number thinking, learning and development: neuro-cognitive, cognitive and developmental approaches. In

M.G. Bartolini Bussi & X.H. Sun (cur.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades. The 23rd ICMI Study*, (pp. 137-168). Cham (CH): Springer.

▷ Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics.* Boston, US: TIMSS & PIRLS International Study Center.

▷ Mussolin, C., De Volder, A., Grandin, C., Schlögel, X., Nassogne, M.C., & Noël, M.P. (2010). Neural correlates of symbolic number comparison in developmental dyscalculia. *Journal of Cognitive Neuroscience, 22*(5), 860-874.

▷ Neisser, U. (1967). Cognitive Psychology. New Jersey: Prentice-Hall.

▷ Nicholls, J.C., Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & Patashnick, M. (1990). Assessing students' theories of success in mathematics: individual and classroom differences. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 109-122.

▷ Nigris, E., Teruggi, L.A., & Zuccoli, F. (2016). *Didattica generale.* Milano-Torino: Pearson.

▷ Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In: A. Gagarsis & S. Papastavridis (Cur.). *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, pp. 115-124.

▷ Niu, R., & Osborne, T. (2019). Chunks are components: A dependency grammar approach to the syntactic structure of Mandarin. *Lingua, 224*, 60-83.

▷ Norton, A., Ulrich, C., Bell, M.A., & Cate, A. (2018). The mathematics educator. *Mathematics at Hand, 27*(1), 33-59.

▷ Novack, M.A., Congdon, E.L., Hemani-Lopez, N., & Goldin-Meadow, S. (2014). From action to abstraction: using the hands to learn math. *Psychological science, 25*(4), 903-910.

▷ Novak, J.D., & Musonda, D. (1991). A 12-year longitudinal study of science concept learning. *American Educational Research Journal, 28*(1), 117-153.

- OECD (2002) *Understanding the brain: Towards a new learning science.* Paris, France: OECD Publishing.
- OECD (2019a). *Skills matter: additional results from the survey of adult skills, OECD Skills Studies.* Parigi: OECD Publishing.
- OECD (2019b). *TALIS 2018 Results (Volume I): Teachers and School Leaders as Lifelong Learners.* Parigi: OECD Publishing.
- OECD. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OECD.
- OECD. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Parigi: OECD Publishing.
- OECD. (2017). *Gender imbalances in the teaching profession.* Paris: OECD publishing.
- Olivieri, D. (2011). *Mente, cervello ed educazione. Neuroscienze e pedagogia in dialogo.* Lecce: Pensa Multimedia.
- Özsoy, G., & Ataman, A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education, 1*(2), 67-82.
- Paoli, F. (2014). *Didattica della matematica dai 3 agli 11 anni.* Roma: Carrocci.
- Papadatou-Pastou, M., Haliou, E., & Vlachos, F. (2017). Brain knowledge and the prevalence of neuromyths among prospective teachers in Greece. *Frontiers in Psychology, 8*(804).
- Pavlovičová, G., & Švecová, V. (2015). The development of spatial skills through discovering in the geometrical education at primary school. *International Journal of Educational Research, 92*, 188-198.
- Peard, R. (2010). Dyscalculia: What is its prevalence? Research evidence from case studies. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8*, 106-113.

- ▷ Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il Portfolio.* Firenze: La Nuova Italia.
- ▷ Pepe, L. (2016). *Insegnare matematica. Storia degli insegnamenti matematici in Italia.* Bologna: Clueb.
- ▷ Peters, L., & Ansari, D. (2019). Are specific learning disorders truly specific, and are they disorders? *Trends in Neuroscience and Education, 17*(100115).
- ▷ Piaget, J., & Szeminska, A. (1968). *La genesi del numero nel bambino.* Firenze: la nuova Italia.
- ▷ Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition, 116*(1), 33-41.
- ▷ Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an amazonian indigene group. *Science, 306*(5695), 499-503.
- ▷ Plummer, B.D., Galla, B.M., Finn, A., Patrick, S.D., Meketon, D., Leonard, J., Goetz, C., Fernandez-Vina, E., Bartolino, S., White, R.E., & Duckworth, A.L. (2014). A behind-the-scenes guide to school-based research. *Mind, Brain, and Education, 8*(1), 15-20.
- ▷ Poli, S., Molin, A. & Lucangeli, D. (2014). *I numeri e lo spazio. Strumenti visuospaziali per il conteggio, primi calcoli e tabelline.* Trento: Erickson.
- ▷ Polo, M. (2017). Didattica laboratoriale e costruzione di competenze nell'insegnamento/apprendimento della Matematica. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 9*(14), 108-126.
- ▷ Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton (NJ): Princeton University.
- ▷ Price, G.R., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M., & Ansari, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology, 17*(24), R1042-R1043.
- ▷ Proulx, J., & Simmt, E. (2016). Distinguishing enactivism from constructivism: engaging with new possibilities. In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Cur.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education, 4, (pp. 99-106). Szeged (Ungheria): PME.

- Provincia Autonoma di Bolzano (2015). *Indicazioni provinciali per la definizione dei curricoli del primo ciclo d'istruzione della scuola in lingua italiana della Provincia Autonoma di Bolzano.* Deliberazione della Giunta Provinciale nr. 1434, del 15/12/2015.
- Provincia Autonoma di Trento (2012). *Piani di studio provinciali primo ciclo di istruzione: linee guida per l'elaborazione dei Piani di studio delle istituzioni scolastiche.* Decreto del presidente della provincia 17 giugno 2010, n. 16-48/Leg.
- R Core Team. (2014). R: A language and environment for statistical computing. (3.0.3) [Computer software]. Vienna: Foundation for Statistical Computing. Retrieved from https://www.R-project.org/.
- Raccomandazione del Parlamento e del Consiglio Europeo 30 dicembre 2006, n. 394 "Competenze chiave per l'apprendimento permanente".
- Rai, A.S. (2018). Unit-5 Approaches and Strategies for Learning Mathematics. *IGNOU,* 5-26.
- Ramani, G.B., & Scalise, N.R. (2020). It's more than just fun and games: play-based mathematics activities for Head Start families. *Early Childhood Research Quarterly, 50*(3), 78-89.
- Regio Decreto 25 settembre 1888, n.5724 "Programmi Gabelli".
- Regio Decreto 7 gennaio 1923, n. 26.
- Resing, W.C.M.,Bakker, M., Pronk, C.M.E., & Elliott, J.G. (2017). Progression paths in children's problem solving: The influence of dynamic testing, initial variability, and working memory. *Journal of Experimental Child Psychology, 153*, 83-109.
- Revlin, R. (2014). *Psicologia cognitiva. Teoria e pratica.* Bologna: Zanichelli.
- Richardson, F.C., & Suinn, R.M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551-554.

▷ Riffert, F. (2018). An introduction to whitehead's new view of learning and its relation to traditional learning theories. *Balkan journal of philosophy, 10*(2), 73-88.

▷ Rinaldi, L., Di Luca, S., Henik, A., & Girelli, L. (2016). A helping hand putting in order: Visuomotor routines organize numerical and non-numerical sequences in space. *Cognition, 152*, 40-52.

▷ Rivoltella, P.C. (2012). *Neurodidattica. Insegnare al cervello che apprende.* Milano: Raffaello Cortina.

▷ Rizzolatti, G., Fadiga, L., Gallese, V., & Fogassi, L. (1996). Premotor cortex and the recognition of motor actions. *Cognitive Brain Research, 3*, 131-141.

▷ Rose, L. T., Daley, S. G., & Rose, D. H. (2011). Let the questions be your guide: MBE as interdisciplinary science. *Mind, Brain, and Education, 5*(4), 153-162.

▷ Rossi, P.G. (2011). *Didattica enattiva. Complessità, teorie dell'azione, professionalità docente.* Milano: FrancoAngeli.

▷ Rossi, P.G., Prenna, V., Giannandrea, L., & Magnoler, P. (2013). Enactivism and didactics. Some research lines. *Education Sciences & Society, 4*(1), 37-57.

▷ Rubinsten, O., Marciano, H., Levy, H. E., & Cohen, L. D. (2018). A framework for studying the heterogeneity of risk factors in math anxiety. *Frontiers in Behavioral Neuroscience, 12.*

▷ Ruzaman, N.K., Rosli, D.I., & Onn, T.H. (2020). Inquiry-based education: innovation in participatory inquiry paradigm. *International Journal of Emerging Technologies in Learning, 15*(10), 4-15.

▷ Sacchi, G. (2007). Laboratori. *Ricerca sul curricolo e innovazione didattica.* Napoli: Tecnodid.

▷ Salvucci, L. (2015). *Strumenti per la didattica della matematica. Ricerche, esperienze, buone pratiche.* Milano: FrancoAngeli.

▷ Sarnecka, B.W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: what children must learn and when they learn it. *Cognition, 108*(3), 662-674.

- Schlicht T. (2018). Does separating intentionality from mental representation imply radical enactivism? Frontiers in Psychology, 9(1497).
- Schmitt, S.A., McClelland, M.M., Tominey, S.L., Acock, A.C. (2015). Strengthening school readiness for Head Start children: Evaluation of a self-regulation intervention. *Early Childhood Research Quarterly, 30*, 20-31.
- Schoenfeld, A.H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society, 47*(6), 641-649.
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo.* Trento: Erickson.
- Shannon, C., & Weaver, W. (1949). *The mathematical theory of communication.* Urbana (IL): University of Illinois.
- Simon, H. A. (1978). Rationality as process and as product of thought. *American Economic Review, 68*(2), 1-16.
- Sitia, C. (1979). *La didattica della matematica oggi: problemi, ricerche, orientamenti.* Bologna: Pitagora.
- Skagerlund, K., Östergren, R., Västfjäll, D., & Träff, U. (2019). How does mathematics anxiety impair mathematical abilities? Investigating the link between math anxiety, working memory, and number processing. *PLoS One, 14*(1).
- Skwarchuk, S.L., Sowinski, C., & LeFevre J.A. (2014). Formal and informal home learning activities in relation to children's early numeracy and literacy skills: The development of a home numeracy model. *Journal of Experimental Child Psychology, 121*, 63-84.
- Smolen, P., Zhang, Y., & Byrne, J.H. (2016). The right time to learn: Mechanisms and optimization of spaced learning. *Nature Reviews Neuroscience, 17*(2), 77-88.
- Sobel, H.S., Cepeda, N.J., & Kapler, I.V. (2011). Spacing effects in real-world classroom vocabulary learning. *Applied Cognitive Psychology, 25*(5), 763-767.

- ▷ Sokolowski, H.M., & Ansari, D. (2018). Understanding the effects of education through the lens of biology. *Science of Learning, 3*(17).
- ▷ Soltanlou, M., Artemenko, C., Dresler, T., Fallgatter, A.J., Ehlis, A.C., & Nuerk, H.C. (2019). Math anxiety in combination with low visuospatial memory impairs math learning in children. *Frontiers in Psychology, 10.*
- ▷ Son, L.K. (2010). Metacognitive control and the spacing effect. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 36*(1), 255-262.
- ▷ Soni, A., & Kumari, S. (2017). The role of parental math anxiety and math attitude in their children's math achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(2), 331-347.
- ▷ Sousa, A. (2010). *Mind, brain, & education. Neuroscience implications for the classroom.* Bloomington (USA): Solution Tree.
- ▷ Spadafora, G. (2018). *Processi didattici per una nuova scuola democratica.* Roma: Anicia.
- ▷ Sullivan, F., & Heffernan, J. (2016). Robotic construction kits as computational manipulatives for learning in the STEM disciplines. *Journal of Research on Technology in Education, 48*, 1-24.
- ▷ Thomas, M.S.C. (2019). Response to Dougherty and Robey (2018) on Neuroscience and Education: Enough Bridge Metaphors-Interdisciplinary Research Offers the Best Hope for Progress. *Current Directions in Psychological Science, 28*(4), 337-340.
- ▷ Thomas, M.S.C., Ansari, D., & Knowland, V.C.P. (2019). Annual research review: educational neuroscience: progress and prospects. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 60*(4), 477-492.
- ▷ Thompson, E. (2007). *Mind in Life.* Cambridge: Harvard University.
- ▷ Tokuhama-Espinosa, T. (2011). *Mind brain and Education Science. A comprehensive guide to the new brain-based teaching.* New York-London: W.W. Norton & Company.

▷ Tokuhama-Espinosa, T. (2014). *Making classrooms better. 50 practical applications of mind, brain, and education science.* New York-London: W.W. Norton & Company.

▷ Tornar, C. (2007). *La pedagogia di Maria Montessori tra teoria e azione.* Milano: FrancoAngeli.

▷ Torra, M. (2016). Más material manipulable para enseñar matemáticas en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(1), 59-64.

▷ Trinchero, R. (2013). Sappiamo davvero come far apprendere? Credenza ed evidenza empirica. *Form@re*, 2(13), 52-67.

▷ Trinchero, R. (2018). Costruire e certificare competenze con il curricolo verticale nel primo ciclo. Milano: Rizzoli.

▷ Van der Graaf, J., van de Sande, E., Gijsel, M., & Segers, E. (2019). A combined approach to strengthen children's scientific thinking: direct instruction on scientific reasoning and training of teacher's verbal support. *International Journal of Science Education, 41*(9), 1119-1138.

▷ Van Schijndel, T.J.P., Jansen, B.R.J. & Raijmakers, M.E.J. (2018). Do individual differences in children's curiosity relate to their inquiry-based learning? *International Journal of Science Education, 40*(9), 996-1015.

▷ Varela, F.J. (1997). Patterns of life: Intertwining identity and cognition. *Brain and Cognition, 34*(1), 72-87.

▷ Varela, F.J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind.* Cambridge: MIT.

▷ Veraksa, A.N., Aslanova, M.S., Bukhalenkova, D.A., Veraksa, N.E., & Liutsko, L. (2020). Assessing the effectiveness of differentiated instructional approaches for teaching math to preschoolers with different levels of executive functions. *Education Sciences, 10*(181).

▷ Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse (NL): Swets & Zeitlinger B.V.

- Villani, V, Bernardi, C, Zoccante, S, Porcaro, R. (2012). *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica.* Milano: Springer.
- Vlach, H.A. (2014). The spacing effect in children's generalization of knowledge: Allowing children time to forget promotes their ability to learn. *Child Development Perspectives, 8*(3), 163-168.
- Vlach, H.A., Bredemann, C.A., & Kraft, C. (2019). To mass or space? Young children do not possess adults' incorrect biases about spaced learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 183, 115-133.
- Von Foerster, H. (2002). *Understanding Understanding. Essays on Cybernetics and Cognition.* New York: Springer-Verlag.
- Vygostkij, L.S. (2016). *Pensiero e linguaggio.* Roma-Bari: Laterza.
- Vygotskij, L.S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes.* Harvard: University Press.
- Wang, J., Libertus, M.E., & Feigenson, L. (2018). Hysteresis-induced changes in preverbal infants' approximate number precision. *Cognitive Development, 47*, 107-116.
- Wang, Z., Hart, S.A., Kovas, Y., Lukowski, S., Soden, B., Thompson, L.A., ... Petrill, S.A. (2014). Who is afraid of math? Two sources of genetic variance for mathematical anxiety. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 55*(9), 1056-1064.
- Ward, D., Silverman, D., & Villalobos, M. (2017). Introduction: the varieties of enactivism. *Topoi, 36*, 365-375.
- Weiner, B. (1974). *Achievement motivation and attribution theory.* Morristown (NJ): General Learning.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: Cambridge University.
- Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: a Guide to Managing Knowledge.* Boston: Harvard Business School.

▷ Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking.* New York: Harper & Row.

▷ Westberg, J., Boser, L., Brühwiler, I. (2019). *School Acts and the Rise of Mass Schooling.* Londra: Palgrave Macmillan.

▷ Willoughby, M.T., Kupersmidt, J.B., & Voegler-Lee, M.E. (2012). Is preschool executive function causally related to academic achievement? *Child Neuropsychology,* 18, 79-91.

▷ Withnall, A. (1995). Towards a definition of numeracy. In D. Coben (Cur.), Proceedings of the Inaugural Conference of Adults Learning Mathematics - A Research Forum, (pp. 11-17). Londra: Goldsmiths College, University of London.

▷ Witkin, H. A. (1971). *A manual for the embedded figures tests.* New York: Springer.

▷ Xu, F., & Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74*(1), B1-B11.

▷ Xue, G., Mei, L., Chen, C., Lu, Z.L., Poldrack, R., & Dong, Q. (2011). Spaced learning enhances subsequent recognition memory by reducing neural repetition suppression. *Journal of cognitive neuroscience, 23*(7), 1624-1633.

▷ Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.

▷ Zan, R., & Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le indicazioni nazionali.* Milano: Giunti Scuola.

▷ Zanniello, G. (2018). Il concetto di personalizzazione. Evoluzione teorica e applicazioni scolastiche. *Scienze Psicologiche, Pedagogiche, Dell'Esercizio Fisico e Della Formazione*, 11-64.

▷ Zingarelli, N. (2000). Matematica. In *Vocabolario della lingua italiana*(12° ed.). Bologna: Zanichelli.

▷ Zorzi, M., Berteletti, I., & Lucangeli, D. (2010). Modelli neuropsicologici e basi neurali della cognizione numerica. In D. Lucangeli & I.C. Mammarella. (2010), *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento* (pp. 56-76). Milano: FrancoAngeli.

▷ Zuccheri, L., & Zudini, V. (2012). Didattica della matematica nell'Impero asburgico e nel Regno d'Italia all'inizio del XX secolo: un confronto. *Quaderni CIRD, Rivista del Centro Interdipartimentale per la Ricerca Didattica dell'Università di Trieste, 4*, 6-19.

Università
Ca'Foscari
Venezia

DEPOSITO ELETTRONICO DELLA TESI DI DOTTORATO

DICHIARAZIONE SOSTITUTIVA DELL'ATTO DI NOTORIETA'
(Art. 47 D.P.R. 445 del 28/12/2000 e relative modifiche)

Io sottoscritto Alice Tovazzi

nat a. a Rovereto (prov. TN) il 03/03/1992

residente a Trambileno in Salita della Val n. 13

Matricola (se posseduta) 956382 Autore della tesi di dottorato dal titolo:

Didattica della matematica alla scuola primaria:

il possibile contributo della scienza Mente, cervello e didattica

Dottorato di ricerca in Filosofia e Scienze della Formazione

(in cotutela con ……………………………………………………)

Ciclo XXXIII

Anno di conseguimento del titolo 2020

DICHIARO

di essere a conoscenza:
1) del fatto che in caso di dichiarazioni mendaci, oltre alle sanzioni previste dal codice penale e dalle Leggi speciali per l'ipotesi di falsità in atti ed uso di atti falsi, decado fin dall'inizio e senza necessità di nessuna formalità dai benefici conseguenti al provvedimento emanato sulla base di tali dichiarazioni;
2) dell'obbligo per l'Università di provvedere, per via telematica, al deposito di legge delle tesi di dottorato presso le Biblioteche Nazionali Centrali di Roma e di Firenze al fine di assicurarne la conservazione e la consultabilità da parte di terzi;
3) che l'Università si riserva i diritti di riproduzione per scopi didattici, con citazione della fonte;
4) del fatto che il testo integrale della tesi di dottorato di cui alla presente dichiarazione viene archiviato e reso consultabile via internet attraverso l'Archivio Istituzionale ad Accesso Aperto dell'Università Ca' Foscari, oltre che attraverso i cataloghi delle Biblioteche Nazionali Centrali di Roma e Firenze;
5) del fatto che, ai sensi e per gli effetti di cui al D.Lgs. n. 196/2003, i dati personali raccolti saranno trattati, anche con strumenti informatici, esclusivamente nell'ambito del procedimento per il quale la presentazione viene resa;
6) del fatto che la copia della tesi in formato elettronico depositato nell'Archivio Istituzionale ad Accesso Aperto è del tutto corrispondente alla tesi in formato cartaceo, controfirmata dal tutor, consegnata presso la segreteria didattica del dipartimento di riferimento del corso di dottorato ai fini del deposito presso l'Archivio di Ateneo, e che di conseguenza va esclusa qualsiasi responsabilità dell'Ateneo stesso per quanto riguarda eventuali errori, imprecisioni o omissioni nei contenuti della tesi;
7) del fatto che la copia consegnata in formato cartaceo, controfirmata dal tutor, depositata nell'Archivio di Ateneo, è l'unica alla quale farà riferimento l'Università per rilasciare, a richiesta, la dichiarazione di conformità di eventuali copie.

Data 01/10/2020 **Firma** Alice Tovazzi

Estratto per riassunto della tesi di dottorato

Studente: Alice Tovazzi **matricola:** 956382

Dottorato: Filosofia e Scienze della Formazione

Ciclo: XXXIII

Titolo della tesi[1]: Didattica della matematica alla scuola primaria: il possibile contributo della scienza *mente, cervello e didattica*

Abstract:
Con uno sguardo pedagogico, e non matematico, è stato osservato il processo di insegnamento-apprendimento all'interno di sei diverse classi di due scuole primarie, allo scopo di verificare come differenti tecniche didattiche (afferenti all'approccio di mente, cervello e didattica) potessero o meno coniugarsi con l'orientamento pedagogico dei docenti. I risultati ottenuti hanno mostrato come l'adozione, seppur implicita, da parte degli insegnanti di tecniche in linea o in contrasto con l'orientamento pedagogico adottato, possa condizionare l'apprendimento degli alunni. Tale influenza emerge tuttavia solo in caso di corrispondenza tra l'orientamento espresso dal docente e quello degli studenti, suggerendo un maggior peso di quest'ultimo rispetto al primo. I dati acquisiti sull'interazione tra l'ansia matematica e le tre differenti tecniche paiono invece eterogenei e sono necessari ulteriori indagini per confermare quanto ipotizzato. Quanto emerso dallo studio conduce a una rivalutazione del ruolo delle preferenze degli alunni riguardo all'apprendimento, oltre a costituire un primo benchmark in riferimento agli orientamenti pedagogici degli alunni della scuola primaria in Italia.

Abstract (engl.):
With a pedagogical rather than a mathematical perspective, the teaching-learning process was observed within six different classes in two primary schools, in order to verify how different teaching techniques (related to the Mind, Brain, and Education approach) could or not be combined with the pedagogical orientation of classes' teachers. Results obtained showed how the adoption, albeit implicit, by teachers of techniques in line or in contrast with the pedagogical orientation adopted, can condition students' math learning. However, this influence emerges only in case of correspondence between the orientation expressed by the teacher and the students, suggesting a greater weight of the latter than the former. Data acquired on the interaction between mathematical anxiety and the three different techniques, on the other hand, seem heterogeneous and further investigations are needed to confirm what hypothesised. What emerged from the study leads to a reassessment of the role of pupils' preferences regarding learning, as well as constituting a first benchmark of the pedagogical orientations of primary school pupils in Italy.

Firma dello studente

Alice Tovazzi

---

[1] Il titolo deve essere quello definitivo, uguale a quello che risulta stampato sulla copertina dell'elaborato consegnato.